Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
14.2.-18.2.11

14. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Unter- und Obersummen)

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2$ und $D_f=[0,\,2]$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei mit $Z_n := \left\{[\frac{0}{n},\,\frac{2}{n}],\,[\frac{2}{n},\,\frac{4}{n}],\,\dots,\,[\frac{2(n-1)}{n},\,\frac{2n}{n}]\right\}$ eine äquidistante Zerlegung von $[0,\,2]$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[0,\,2]$ und tragen Sie in Ihr Diagramm die Flächenelemente der Unter– bzw. Obersummen bzgl. der Unterteilung Z_5 ein. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Untersummen $s_f(Z_n)$ bzw. der Obersummen $S_f(Z_n)$ an.

(Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel $\sum\limits_{s=1}^{k} s^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$).

(b) Bestimmen Sie nun die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} s_f(Z_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(Z_n)$ und geben Sie $\int\limits_0^2 f(x)dx$ an.

Lösung:

(a) Mit $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},\,x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$ und $M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},\,x_i]} f(x) = f(x_i)$ folgt:

$$s_f(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \text{ und}$$

$$S_f(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Mit $\sum\limits_{s=1}^{k} s^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$ folgt:

$$s_f(Z_n) = \frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{8}{n^3}\cdot\frac{(2n-1)n(n-1)}{6} = \frac{8}{n^3}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{6} = \frac{8}{6}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \text{ und}$$

$$S_f(Z_n) = \frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{8}{n^3}\cdot\frac{(2n+1)(n+1)n}{6} = \frac{8}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{8}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) Mit den Formeln aus a) erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{6}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n).$$

Da f auf $[a,\,b]$ beschränkt ist und $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(Z_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$ gilt, erhalten wir $\int\limits_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3}$.

Aufgabe G2 (Grundlegende Integrationstechniken)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) dx$
(b) $\int (x^2 + 3\cos x)dx$
(c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 2x^3\right) dx$
(d) $\int \frac{3}{x} dx$
(e) $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2\right) dx$
(f) $\int \left(4e^x - 4x^3 + 2x + 5\sin x\right) dx$
(g) $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x} + x^{\frac{3}{5}}\right) dx$
(h) $\int \sinh x dx$
(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$
(k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$
(l) $\int \frac{1}{1-x^2} dx.$

Lösung:

(a) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) dx = \frac{1}{8}x^4 + x^2 + C.$
(b) $\int (x^2 + 3\cos x)dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\sin x + C.$
(c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 2x^3\right) dx = -\frac{3}{x} - \frac{1}{2}x^4 + C.$
(d) $\int \frac{3}{x} dx = 3\ln|x| + C.$
(e) $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2\right) dx = -\frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x} + \ln|x| + x + x^2 + x^3 + C.$
(f) $\int \left(4e^x - 4x^3 + 2x + 5\sin x\right) dx = 4e^x - x^4 + x^2 - 5\cos x + C.$
(g) $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x} + x^{\frac{3}{5}}\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{2}\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C.$
(h) $\int \sinh x dx = \cosh x + C.$
(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$
(j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$
(k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + C.$
(l) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh}(x) + C$, wobei $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$ für $x \in (-1, 1)$.

Zu (i)-(l): Das Integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ berechnet sich wie folgt: Man substituiere $x = \sin(t)$. Somit haben wir $\frac{dx}{dt} = \cos(t)$, also $dx = \cos(t)dt$. Damit wird

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t)dt = \int dt = t + C = \arcsin(x) + C.$$

Bei den Aufgaben (j-l) verfährt man völlog analog. Bei Aufgabe (j) substituiert man $x = \tan(t)$; dies liefert $dx = (1 + \tan^(t))dt$. Bei (k) und (l) setzt man jeweils $x = \sinh(t)$ bzw. $x = \operatorname{artanh}(t)$.

Aufgabe G3 (Unbestimmte Integrale)

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int e^x \cos(x)dx$
(b) $\int x\ln(x)dx$
(c) $\int \frac{1}{x\ln(x)} dx$
(d) $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx.$

Lösung:

(a) Partielle Integration ergibt:

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \left(-e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)dx\right)$$

Wir haben also

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x),$$

und somit
$$\int e^x \cos(x)dx = \frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x)) + C.$$

(b) Ebenfalls erhalten wir unter Anwendung von partieller Integration (indem wir den Faktor x integrieren und den Logarithmus differenzieren):

$$\int x \ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

(c) Unter Verwendung der Substitutionsregel mit ($t := \ln(x), dt = \frac{1}{x}dx$) vereinfacht sich das Integral zu
$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln(t) + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

(d) Unter Verwenung der Subsitutionsregel mit $t := 5x^3 + 1$, d.h. $\frac{dt}{dx} = 15x^2$ also $x^2dx = \frac{1}{15}dt$ ergibt sich

$$\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1}dx = \frac{1}{15}\int \sqrt[5]{t}dt = \frac{1}{15}\int t^{1/5}dt = \frac{1}{75}t^{6/5} = \frac{t\sqrt[5]{t}}{75}.$$

Aufgabe G4 (Bestimmte Integrale)

Bestimmen Sie den Wert folgender Integrale

(a) $\int\limits_0^1 \frac{\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2(x)}e^{\sin(x)}\cos(x)dx$

(c) $\int\limits_0^1 \cos(\sin(x))\cos(x)dx$

(d) $\int\limits_0^{\sqrt[4]{\pi/2}} x^3\sin(x^4)\cos(x^4)dx$

(e) $\int\limits_0^{pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1+\sin(x)+\cos(x))^3}dx.$

Lösung:

(a) Wir benutzen die Substitutionsregel, um das Integral zu vereinfachen. Wir setzen $t := \cos(u)$; somit ist $\frac{dt}{du} = -\sin(u)$, also $dt = -\sin(u)du$. Die Integrationsgrenzen verändern sich unter dieser Substitution zu $u_0 = u(0) = \arccos(0) = \pi/2$ und $u_1 = u(1) = \arccos(1) = 0$. Also:

$$\int\limits_0^1 \frac{\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\arccos(\cos(u))}{\sqrt{1-\cos^2(u)}}\sin(u)du = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{u}{\sin(u)}\sin(u)du = \int\limits_0^{\pi/2} udu = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) Zunächst vereinfachen wir das Integral zu

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2(x)}e^{\sin(x)}\cos(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} |\sin(x)|e^{\sin(x)}\cos(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x)e^{\sin(x)}\cos(x)dx,$$

wobei wir den Betragsstrich weglassen dürfen, da $\sin(x)$ im ganzen Interval $[0, \pi/2]$ nicht negativ ist. Wir machen dann die Substitution $t := \sin(x)$, damit können wir nämlich $\cos(x)dx$ mit dt identifizieren; die neuen Integrationsgrenzen ergeben sich zu $t_0 = t(0) = 0$ und $t_1 = t(\pi/2) = 1$. Insgesamt vereinfacht sich das ursprüngliche Integral dann zu

$$\int_0^1 te^t dt.$$

Nun verwenden wir partielle Integration - wir integrieren die Exponentialfunktion und differenzieren den Faktor t. Dies ergibt:

$$\int_0^1 te^t dt = te^t|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^t dt = te^t|_0^1 - e^t|_0^1 = 1.$$

(c) Hier bietet es sich an die folgende Substitution zu benutzen. Setze etwa $t := \sin(x)$, dann ist $\frac{dt}{dx} = \cos(x)$, also $dt = \cos(x)dx$. Die neuen Grenzen verlaufen dann von 0 bis $\pi/2$. Somit vereinfacht sich das gegebene Integral zu

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = \sin(t)|_0^{\pi/2} = 1.$$

(d) Hier besteht der Trick darin, zwei mal hintereinander eine Substitution durchzuführen. Zunächst substituieren wir $t := x^4$. Wir haben $\frac{dt}{dx} = 4x^3$ und die Grenzen verändern sich zu 0 und $\pi/2$, so dass dass urspüngliche Integral gleich ist mit dem Integral

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(t)dt.$$

Nun setzen wir $u := \sin(t)$; damit ist $du = \cos(t)dt$ und das Integral vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{1}{4}\int_0^1 udu = \frac{1}{4}.$$

Beachte, dass die Grenzen zu 0 und 1 geändert werden.

(e) Hier haben wir es mit einem typischen Beispiel eines rationalen Ausdruckes aus Cosinus-und Sinusfunktionen zu tun. Um solche Integrale zu lösen verwndet man als Kochrezept eine $\tan(x/2)$-Subsitution, d.h. wir setzen: $t = \tan(\frac{x}{2})$, dann ist $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Ferner lassen sich nun die Cosinus- und Sinusfunktion ausdrücken als $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ (nachrechnen!). Mit dieser Substitution vereinfacht sich das gegebene Integral zu

$$\int_0^1 \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{(1+t^2+2t+1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \;=\; \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^3}dt$$

Mittels Partialbruchzerlegung erhält man schließlich:

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^3}dt = \int_0^1 \Big[\frac{1}{(1+t)^3} - \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t}\Big]dt = \Big[\frac{-1/2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t} + \ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln(2) - \frac{5}{8}.$$