Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
07.02.-11.02.11

13. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit)

(a) Gegeben sei das Polynom P mit

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2$$

und das abgeschlossene Intervall $I = [-2, 2]$.

(i) Ist P stetig auf I?

(ii) Ist P auf I beschränkt?

(iii) Besitzt P auf I ein Maximum bzw. ein Minimum?

(iv) Zeigen Sie, dass P in $[-2, 2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $D(f) = [0, 3]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für} \quad x \in [0,1], \\ ax - x^3 + x & \text{für} \quad x \in (1,2), \\ \dfrac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2 + 1} & \text{für} \quad x \in [2,3]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a und $b \in \mathbb{R}$ so, dass f auf $D(f)$ stetig ist.

Lösung:

(a) (i) P ist stetig als Komposition stetiger Funktionen.

(ii) P ist beschränkt, da eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ immer beschränkt ist.

(iii) Ja, folgt direkt aus dem Existenzsatz von Minimum und Maximum .

(iv) Wegen $P(-2) = -54 < 0$ und $P(2) = 42 > 0$ besitzt P nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall I (ohne dass diese explizit berechnet werden muss!).

(b) Der linksseitige Grenzwert der Funktion f an der Stelle $x = 1$ ist 3; in Abhängigkeit von a berechnet sich der rechtsseitige Grenzwert zu $\lim_{x \to 1, x > 1} f(x) = a$. Für die Wahl $a = 3$ stimmen also rechtsseitiger Grenzwert und linksseitiger Grenzwert der Funktion überein.
An der Stelle $x = 2$ ist der linksseitige Grenzwert 0. Da 2 keine Nullstelle von $x^3 - x - 1$ ist, bleibt für die Wahl von b nur $b = 0$. In diesem Fall ist f eine auf ganz $D(f)$ stetige Funktion (man beachte, dass $x^2 + 1$ keine Nullstellen in $[2, 3]$ besitzt).

Aufgabe G2 (Differentialrechnung)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

$$f_1(x) = 3x - x^2, \qquad f_2(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad (x \neq \pm 1), \qquad f_3(x) = \sqrt[3]{x^4+5}.$$

(b) Stellen Sie die Gleichung derjenigen Tangente an die Parabel f_1 auf, die parallel zur Winkelhalbierenden $y = x$ verläuft. Skizzieren Sie den Sachverhalt.

(c) Zeigen Sie, dass zwar $f_2'(x) > 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gilt, aber f_2 dennoch nicht monoton steigend ist. Wie passt das zusammen? Fertigen Sie eine Skizze von f_2 an.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= -2x + 3 \\
f_2'(x) &= \frac{(1-x^2) - (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{(1-x^2)} + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \\
f_3'(x) &= \frac{1}{3}(x^4+5)^{-2/3}(4x^3) = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(x^4+5)^2}}
\end{aligned}$$

(b) Allgemein ist die Tangente an $(x_0, f(x_0))$ gegeben durch

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Sie ist parallel zur Winkelhalbierenden $y = x$, wenn $f'(x_0) = 1$, d.h. im Falle von f_1:

$$-2x_0 + 3 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 = 1.$$

Wegen $f_1(1) = 2$ ist die gesuchte Gleichung daher

$$y = 2 + (x - 1) = 1 + x.$$

(c) Es gilt immer $f_2'(x) = \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)^2} > 0$, denn Zähler und Nenner sind immer positiv. Aber f_2 ist nicht monoton steigend, denn z.B. ist

$$f_2(0) = 0 > -\frac{2}{3} = f_2(2).$$

Dies ist kein Widerspruch, denn der Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ist kein Intervall! Auf den zusammenhängenden Teilstücken $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, +\infty)$ ist f_2 in der Tat monoton wachsend. Daraus ergibt sich, wenn man sich die einseitigen Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ bzw. $x \to \pm 1$ überlegt (oder Symmetrie!), der ungefähre Verlauf der Funktion.

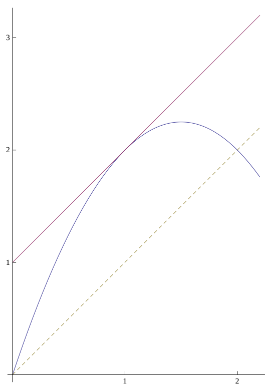

Bild zu (b)

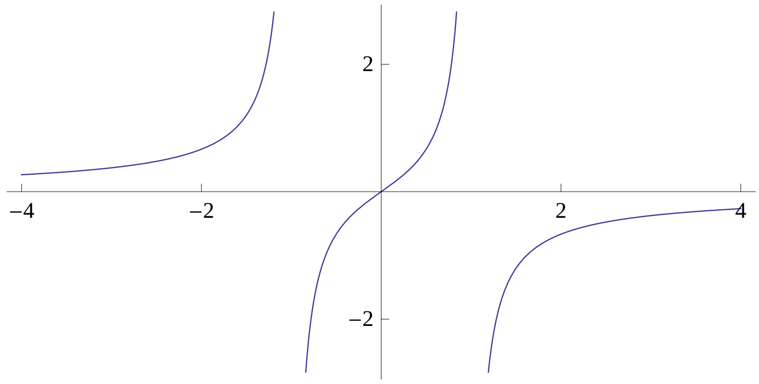

Bild zu (c)

Aufgabe G3 (Mittelwertsatz)

Zeigen Sie durch Quadrieren und Anwendung des Mittelwertsatzes, dass für $x > 0$

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Lösung: Der Mittelwertsatz besagt: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$, sodass

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

falls f differenzierbar ist auf dem Intervall $[a, b]$.
Damit wollen wir die Ungleichungen

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

für $x > 0$ zeigen.
Da beide Seiten positiv sind ($x > 0$), kann man bedenkenlos auch die quadrierte Ungleichung

$$1 + x < \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

zeigen. Wir benutzen den Mittelwertsatz für die Funktion $f(y) = (1 + \frac{y}{2})^2$ in den Intervallgrenzen $a = 0$ und $b = x$. Es ist $f'(y) = (1 + \frac{y}{2})$. Nach dem MWS gibt es also ein $\xi \in (0, x)$, sodass

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \underbrace{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)}_{>1} \underbrace{(x - 0)}_{=x>0} > x.$$

Dies ist die gewünschte Ungleichung.

Aufgabe G4 (Multiple Choice)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie für Ihre Antwort jeweils eine Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ surjektiv, so ist $\inf f = -\infty$.

(b) Ist $f\colon [a, b] \to [c, d]$ bijektiv und differenzierbar, so ist f^{-1} differenzierbar.

(c) Polynome sind unendlich oft differenzierbar.

(d) Ist f oder g nicht differenzierbar, so ist auch $f \circ g$ nicht differenzierbar.

Lösung:

(a) Richtig, denn wäre $\inf f = C > -\infty$, so gäbe es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = C - 1$, im Widerspruch zur Surjektivität.

(b) Falsch, die Ableitung der Umkehrfunktion ist zwar nach Umkehrformel

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

aber nur, wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist. So ist zum Beispiel die Umkehrfunktion der Funktion aus (iv),

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y} & \text{für } y \leq 0 \\ \sqrt{y} & \text{für } y > 0 \end{cases}$$

in $y = 0$ nicht differenzierbar. Das Problem: $f'(f^{-1}(0)) = f'(0) = 0$.

(c) Richtig, die $(n+1)$-te Ableitung eines Polynoms n-ten Grades ist die Nullfunktion.

(d) Falsch, ist $f(x) = |x|$ und $g(x) = x^2$, so ist $(f \circ g)(x) = |x^2| = x^2$.

Hausübung

– Abgabe am 14.02.-18.02.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Eigenschaften von Funktionen) (6 Punkte)

(a) Welche der folgenden Funktionen haben ein Maximum und/oder Minimum?

$$f : [-\frac{1}{3}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^6 - 3}{x^2 + 4}, \qquad g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

(b) Beweisen Sie: Es gibt mindestens eine Lösung $x_0 \in]-1, +\infty[$ der Gleichung:

$$\sin(x) = -\ln(x + 1) + 1.$$

Lösung:

(a) Die Funktion f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[-\frac{1}{3}, \sqrt{3}]$, nimmt daher Maximum und Minimum an. Die Funktion g ist streng monoton fallend und nimmt daher auf dem offenen Intervall $]1, +\infty[$ weder Minimum noch Maximum an.

(b) Die Funktion $f\ :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) + \ln(x + 1) - 1$ ist stetig, $f(\frac{-1}{2}) < 0$, und $f(e^3 - 1) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x_0 \in]-\frac{1}{2}, e^3 - 1[$ mit $f(x_0) = 0$, also gilt: $\sin(x_0) = 1 - \ln(x_0 + 1)$.

Aufgabe H2 (Differentialrechnung) (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen

$$f_1(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (x \neq 1), \qquad f_3(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$$

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}x & \text{falls } x \leq \frac{1}{2} \\ ax + b & \text{falls } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

differenzierbar ist.
Tipp: Sie muss dafür insbesondere stetig sein.

Lösung:

(a)

$$f_1'(x) = 3\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) = 6x^5 - 9x^2 - \frac{3}{x^4}$$
$$f_2'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Die Funktion f_3 kann man umformen zu $f_3(x) = \left(x\left(xx^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} = x^{7/8}$. Daher ist

$$f_3'(x) = \frac{7}{8}x^{-1/8} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}x & \text{falls } x \leq \frac{1}{2} \\ ax + b & \text{falls } x > \frac{1}{2} \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{4} & \text{falls } x < \frac{1}{2} \\ a & \text{falls } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Damit f in $x = \frac{1}{2}$ differenzierbar ist, muss die linksseitige Ableitung in diesem Punkt mit der rechtsseitigen übereinstimmen, d.h.

$$a = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Weiterhin muss die Funktion im Punkt $x = \frac{1}{2}$ stetig sein, d.h. es muss gelten

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}a + b.$$

Setzt man $a = \frac{5}{4}$ ein, erhält man

$$b = -\frac{1}{4}.$$

Aufgabe H3 (Mittelwertsatz) (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für $0 < a < b$ und $n > 1$ die Ungleichungen:

(a) $b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$

(b) $b^n - a^n > n(b-a)a^{n-1}$

Lösung: Der Mittelwertsatz besagt: Es gibt ein $\xi \in (a,b)$, sodass

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$

falls f differenzierbar ist auf dem Intervall $[a,b]$.
Es ist zu zeigen, dass $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ für $0 < a < b$ und $n > 1$. Dazu wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = x^n$ im Intervall $[a,b]$ an. Wegen $f'(x) = nx^{n-1}$ gibt es also ein $\xi \in (a,b)$, sodass

$$b^n - a^n = n\xi^{n-1}(b-a). \tag{1}$$

Die Funktion ξ^{n-1} ist für $\xi > 0$ streng monoton wachsend, d.h. für $\xi \in (a,b)$ gilt (wegen $a > 0$)

$$a^{n-1} < \xi^{n-1} < b^{n-1}.$$

Da außerdem $n(b-a) > 0$ bekommt man damit aus (**??**) die gewünschte Ungleichung

$$n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}.$$

Aufgabe H4 (Multiple Choice) (5 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie für Ihre Antwort jeweils eine Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

(b) Ist die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so ist $\sup f = +\infty$.

(c) Eine stetige injektive Funktion ist streng monoton.

(d) Ist f stetig differenzierbar, so ist f' differenzierbar.

(e) Sind f und g nicht differenzierbar, so ist auch $f \circ g$ nicht differenzierbar.

Lösung:

(a) Richtig, denn für die Stetigkeit sind Definitionslücken unerheblich und $\frac{1}{x}$ ist in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sicherlich stetig.

(b) Falsch, ein "rationales" Gegenbeispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1} - 1 & \text{für } x \leq 0 \\ -\frac{1}{x+1} + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(c) Die Aussage ist im allgemeinen falsch wie zum Beispiel (a) zeigt. Sie ist jedoch richtig, wenn f auf einem Intervall $[a, b]$ definiert ist. Denn wäre f dann nicht streng monoton so gäbe es ein lokales Extremum bei $x_0 \in (a, b)$. Wäre das zum Beispiel ein Maximum und $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0 + \varepsilon) \leq f(x_0)$, so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $f(\xi) = f(x_0 + \varepsilon)$, im Widerspruch zur Injektivität.

(d) Falsch, die Ableitung kann stetig und nicht differenzierbar sein. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit der Ableitung $f'(x) = 2|x|$.

(e) Auch falsch, ist $f(x) = |x|$ und g die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases},$$

so ist $(f \circ g)(x) = 1$ für alle x, also differenzierbar.