



12. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Monotonie und Injektivität)

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x) = x \ln(x^2)$ und prüfen Sie mittels Monotonieuntersuchung, auf welchen Gebieten die Funktion injektiv ist.

Lösung: Die Funktion $\ln(\cdot)$ ist bei 0 nicht definiert, daher ist der maximale Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beh.: $f(x)$ ist auf $(-\infty, 1/e)$ und $(1/e, \infty)$ streng monoton steigend, sowie auf $(-1/e, 0) \cup (0, 1/e)$ streng monoton fallend.

Um dies zu zeigen, benutzen wir die Eigenschaft, dass eine differenzierbare Funktion genau dann streng monoton steigend (fallend) auf einem Intervall I ist, wenn dort $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ überall in jedem Punkt von I gilt.

Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall $x > 0$: Dort ergibt sich die Ableitung zu $f'(x) = \ln(x^2) + x \frac{2x}{x^2} = 2 \ln(x) + 2$. Es gilt $f'(x) = 0$, wenn $x = 1/e$. Da $f''(1/e) = 2e > 0$ gilt, liegt bei $x = 1/e$ ein lokales Minimum vor. Die Funktion ist also im offenen Intervall $(0, 1/e)$ streng monoton fallend und auf $(1/e, \infty)$ streng monoton steigend.

2. Fall: $x < 0$ geht völlig analog. Wir haben ein lokales Maximum bei $x = -1/e$. f ist auf $(-\infty, -1/e)$ streng monoton steigend und auf $(-1/e, 0)$ streng monoton fallend. Auf allen vier Teilintervallen ist die Funktion f , wenn wir sie auf das jeweilige Teilintervall einschränken, injektiv. Folglich ist sie auf jedem der vier Teilintervalle dort jeweils umkehrbar. Allerdings muss man für jedes Intervall separat eine Umkehrfunktion angeben. Man sagt, die Funktion f ist lokal umkehrbar (außer bei $-1/e, 0, 1/e$) aber nicht global umkehrbar.

Aufgabe G2 (Umkehrfunktionen)

Berechnen Sie für folgende bijektive Funktionen die Umkehrfunktionen sowie die zu den Umkehrfunktionen gehörigen Definitionsbereiche:

$$(a) f(x) = \frac{1}{2}x - 3 \quad (b) g(x) = \frac{x}{x-1} \quad (c) h(x) = e^{5x} - 8.$$

Lösung:

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ ist bijektiv, also ist $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Es ist $f(x) = y = \frac{1}{2}x - 3 \Leftrightarrow x = 2y + 6$, daher ist $f^{-1}(x) = 2x + 6$.

(b) $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist bijektiv, also ist $D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Es ist $g(x) = y = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow x(y-1) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1}$, daher ist $g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$.

- (c) $h: \mathbb{R} \rightarrow (-8, \infty)$ mit $h(x) = e^{5x} - 8$ ist bijektiv, daraus folgt $D_{f^{-1}} = 8, \infty)$.
 Es ist $h(x) = y = e^{5x} - 8 \Leftrightarrow e^{5x} = y + 8 \Leftrightarrow 5x = \ln(y + 8) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \ln(y + 8)$, somit ist
 $h^{-1}(x) = \frac{1}{5} \ln(x + 8)$.

Aufgabe G3 (Grenzwerte)

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte. Fertigen Sie eine Skizze an.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 6x - 16}{x - 8}$, $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x + 3}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sin \frac{1}{x})$
 (c) $\lim_{x \nearrow 1} f(x)$ und $\lim_{x \searrow 1} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Lösung:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 6x - 16}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(x+2)}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} (x+2) = 10$,
 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 3x + 2)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 3x + 2) = 20$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ existiert nicht,
 da $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{2\pi n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sin \frac{1}{x}) = 0$,
 da $0 \leq |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = |x| \cdot |\sin \frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
 (c) $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} x = 1$ und $\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}) = 0$.

Aufgabe G4 (Stetige Ergänzung)

Können Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ derart definieren, dass die Funktionen auf ganz \mathbb{R} stetig sind?

- (a) $f(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } x \neq 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$ (c) $h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$
 (b) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ (d) $k(x) = \begin{cases} \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} & \text{für } x < 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \\ n(x+1) & \text{für } x > 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

Hinweis zu d): Verwenden Sie $\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} z^i$ für $z \neq 1, n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- (a) Es ist $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = 10$, daher ist die Funktion mit der Setzung $f(0) = 10$ stetig ergänzbar an der Stelle $x = 0$.
 (b) Es ist $\lim_{x \nearrow 0} g(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} g(x)$, daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ergänzbar.
 (c) Es ist $\lim_{x \nearrow 0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cos \frac{1}{x}) = 0$ mit einer ähnlichen Argumentation wie in Aufgabe G3 b). Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ durch $h(0) = 0$ stetig ergänzbar.
 (d) Es ist $\lim_{x \nearrow 0} k(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{(e^x)^n - 1}{e^x - 1} \stackrel{\text{Hinweis}}{=} \lim_{x \nearrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (e^x)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\lim_{x \nearrow 0} (e^x)^i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$
 und $\lim_{x \searrow 0} k(x) = \lim_{x \searrow 0} n(x+1) = n$. Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ durch $k(0) = n$ stetig ergänzbar.

Aufgabe G5 (Hyperbolische Funktionen)

Wir definieren die *hyperbolischen Funktionen* über die Exponentialfunktion:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \neq 0).$$

Fertigen Sie eine Skizze der jeweiligen Funktionsgraphen an. Zeigen Sie unter Benutzung der Definition die folgenden drei Identitäten:

$$(a) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (b) \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad (c) \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x.$$

Lösung:

$$(a) \cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$(b) \cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh(2x).$$

$$(c) 2 \sinh x \cosh x = 2 \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \sinh(2x).$$