Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
31.1.-4.2.11

12. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Monotonie und Injektivität)

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x) = x\ln(x^2)$ und prüfen Sie mittels Monotonieuntersuchung, auf welchen Gebieten die Funktion injektiv ist.

Lösung: Die Funktion $\ln(\cdot)$ ist bei 0 nicht definiert, daher ist der maximale Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Beh.: $f(x)$ ist auf $(-\infty, 1/e)$ und $(1/e, \infty)$ streng monoton steigend.sowie auf $(-1/e, 0) \cup (0, 1/e)$ streng monoton fallend.
Um dies zu zeigen, benutzen wir die Eigenschaft, dass eine differenzierbare Funktion genau dann streng monoton steigend (fallend) auf einem Intervall I ist, wenn dort $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ überall in jedem Punkt von I gilt.
Wir machen eine Fallunterscheidung:
1. Fall $x > 0$: Dort ergibt sich die Ableitung zu $f'(x) = ln(x^2) + x\frac{2x}{x^2} = 2ln(x) + 2$. Es gilt $f'(x) = 0$, wenn $x = 1/e$. Da $f''(1/e) = 2e > 0$ gilt, liegt bei $x = 1/e$ ein lokales Minimum vor. Die Funktion ist also im offenen Intervall $(0, 1/e)$ streng monoton fallend und auf $(1/e, \infty)$ streng monoton steigend.
2. Fall: $x < 0$ geht völlig analog. Wir haben ein lokales Maximum bei $x = -1/e$. f ist auf $(-\infty, -1/e)$ streng monoton steigend und auf $(-1/e, 0)$ streng monoton fallend. Auf allen vier Teilntervallen ist die Funktion f, wenn wir sie auf das jeweilige Teilintervall einschränken, injektiv. Folglich ist sie auf jedem der vier Teilintervalle dort jeweils umkehrbar. Allerdings muss man für jedes Intervall separat eine Umkehrfunktion angeben. Man sagt, die Funktion f ist lokal umkehrbar (außer bei $-1/e, 0, 1/e$) aber nicht global umkehrbar.

Aufgabe G2 (Umkehrfunktionen)

Berechnen Sie für folgende bijektive Funktionen die Umkehrfunktionen sowie die zu den Umkehrfunktionen gehörigen Definitionsbereiche:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ (b) $g(x) = \frac{x}{x-1}$ (c) $h(x) = e^{5x} - 8$.

Lösung:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ ist bijektiv, also ist $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
Es ist $f(x) = y = \frac{1}{2} - 3 \Leftrightarrow x = 2y + 6$, daher ist $f^{-1}(x) = 2x + 6$.

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist bijektiv, also ist $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Es ist $g(x) = y = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow x(y-1) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1}$, daher ist $g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$.

(c) $h : \mathbb{R} \to (-8, \infty)$ mit $h(x) = e^{5x} - 8$ ist bijektiv, daraus folgt $D_{f^{-1}} = 8, \infty)$.
Es ist $h(x) = y = e^{5x} - 8 \Leftrightarrow e^{5x} = y + 8 \Leftrightarrow 5x = \ln(y + 8) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\ln(y + 8)$, somit ist $h^{-1}(x) = \frac{1}{5}\ln(x + 8)$.

Aufgabe G3 (Grenzwerte)

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte. Fertigen Sie eine Skizze an.

(a) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x^2-6x-16}{x-8}$, $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-7x+6}{x+3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)$ und $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \le 1 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x^2-6x-16}{x-8} = \lim\limits_{x\to 8} \frac{(x-8)(x+2)}{x-8} = \lim\limits_{x\to 8}(x + 2) = 10,$
$\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-7x+6}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x^2-3x+2)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}(x^2 - 3x + 2) = 20.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ existiert nicht,
da $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1 \ne 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}}$,
$\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$,
da $0 \le |x \cdot \sin\frac{1}{x}| = |x| \cdot |\sin\frac{1}{x}| \le |x| \xrightarrow{x\to 0} 0.$

(c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} x = 1$ und $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right) = 0.$

Aufgabe G4 (Stetige Ergänzung)

Können Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ derart definieren, dass die Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind?

(a) $f(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } x \ne 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \ne 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(d) $k(x) = \begin{cases} \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} & \text{für } x < 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \\ n(x+1) & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

Hinweis zu d): Verwenden Sie $\frac{z^n-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} z^i$ für $z \ne 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 10$, daher ist die Funktion mit der Setzung $f(0) = 10$ stetig ergänzbar an der Stelle $x = 0$.

(b) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} g(x) = -1 \ne 1 = \lim\limits_{x\searrow 0} g(x)$, daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ergänzbar.

(c) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} h(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \cos\frac{1}{x}) = 0$ mit einer ähnlichen Argumentation wie in Aufgabe G3 b). Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ durch $h(0) = 0$ stetig ergänzbar.

(d) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} k(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{(e^x)^n-1}{e^x-1} \overset{\text{Hinweis}}{=} \lim\limits_{x\nearrow 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (e^x)^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\lim\limits_{x\nearrow 0}(e^x)^i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 1 = n$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} k(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} n(x + 1) = n$. Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ durch $k(0) = n$ stetig ergänzbar.

Aufgabe G5 (Hyperbolische Funktionen)

Wir definieren die *hyperbolischen Funktionen* über die Exponentialfunktion:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}\ (x \neq 0).$$

Fertigen Sie eine Skizze der jeweiligen Funktionsgraphen an. Zeigen Sie unter Benutzung der Definition die folgenden drei Identitäten:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (b) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ (c) $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.

Lösung:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$
$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

(b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$
$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh(2x).$

(c) $2\sinh x \cosh x = 2 \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \sinh(2x).$

Hausübung

– Abgabe am 7.2.-11.2.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Umkehrfunktionen und Verkettungen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^4} \text{ und } g(x) = x + 1, \text{ definiert auf } D_f = D_g = (0, +\infty).$$

(a) Skizzieren Sie f und g. Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und Injektivität.

(b) Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktionen. Skizzieren Sie diese.

(c) Bilden Sie die Verkettung $h = f \circ g$. Untersuchen Sie auch diese auf Monotonie und Injektivität, und bilden Sie auf direktem Wege ihre Umkehrfunktion.

(d) Für die Umkehrfunktion h^{-1} von $h = f \circ g$ gilt $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Verifizieren Sie daran Ihr Resultat aus (c).

Lösung:

(a) Für $x, y \in D_f$ ist $f(x) > f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x^4} > \frac{1}{y^4} \Leftrightarrow y^4 > x^4 \Leftrightarrow y > x$. Also ist f streng monoton fallend und daher injektiv auf D_f.
Für $x, y \in D_g$ ist $g(x) > g(y) \Leftrightarrow x + 1 > y + 1 \Leftrightarrow x > y$. Also ist g streng monoton steigend und daher injektiv auf D_g .

(b) Da f auf D_f injektiv ist, existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf $D_{f^{-1}} = f(D_f) = (0, +\infty)$.
Für $x \in D_f$ ist $f(x) = y = \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$. Also ist $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ für $x \in D_{f^{-1}}$.
Da g auf D_g injektiv ist, existiert die Umkehrfunktion g^{-1} auf $D_{g^{-1}} = g(D_g) = (1, +\infty)$.
Für $x \in D_g$ ist $g(x) = y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$. Also ist $g^{-1}(x) = x - 1$ für $x \in D_{g^{-1}}$.

(c) Es ist $h(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \frac{1}{(x+1)^4}$ auf $D_h = g^{-1}(D_f) = (0, +\infty)$. Für $x, y \in D_h$ ist $h(x) > h(y) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^4} > \frac{1}{(y+1)^4} \Leftrightarrow (y + 1)^4 > (x + 1)^4 \Leftrightarrow y + 1 > x + 1 \Leftrightarrow y > x$. Damit ist h streng monoton fallend und somit injektiv auf D_h.
Für $x \in D_h$ ist $h(x) = y = \frac{1}{(x+1)^4} \Leftrightarrow (x + 1)^4 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{y}} - 1$. Somit ist $h^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 1$ auf $D_{h^{-1}} = h(D_h) = (0, 1)$.

(d) Es ist $h^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 1$ für $x \in D_{h^{-1}}$. Dies bestätigt das Ergebnis aus (c).

Aufgabe H2 (Berechnung von Grenzwerten) (6 Punkte)

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{-x+8}}$, $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+8}{9x^2+8x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^k \cos(x)$, $k \in \mathbb{Z}$

(c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)$ und $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$.

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{-x+8}} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\sqrt{-x+8}} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{\sqrt{-x+8}} = -\frac{2}{3}$,

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)x} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)x} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{x} = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+8}{9x^2+8x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-4/x+8/x^2}{9+8/x} = 1/3$,

$\lim\limits_{x\to\infty} x^k \cos(x) = 0$ falls $k < 0$, denn x^k konvergiert nach Null, wenn k negativ ist, und $|\cos(x)| \le 1$ bleibt ja beschränkt. In den anderen Fällen jedoch existiert der Grenzwert nicht, denn für $k \ge 0$ konvergiert x^k nicht gegen Null, während $\cos(x)$ stets zwischen -1 und 1 mit ständig wechselndem Vorzeichen oszilliert (genauere Argumentation wie in Aufgabe G3 b)).

(c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} \overset{x\le 1}{=} \lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\nearrow 1} -1 = -1$ und

$\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} \overset{x\ge 1}{=} \lim\limits_{x\searrow 1} \frac{x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\searrow 1} 1 = 1.$

Aufgabe H3 (Stetige Ergänzung) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{für } x < 0 \\ x^3 - 4a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ für $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ in Abhängigkeit von a.

(b) Für welchen Wert von a lässt sich die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzen?

Lösung:

(a) Es ist $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} e^{3x} = 1$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} x^3 - 4a = -4a$.

(b) Damit sich die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzen lässt, muss $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ gelten. Dies ist für $a = -\frac{1}{4}$ erfüllt. In diesem Fall lässt sich die Funktion durch die Setzung $f(0) = 1$ an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzen.

Aufgabe H4 (Umkehrfunktionen von hyperbolischen Funktionen) (6 Punkte)

Die Umkehrfunktionen arsinh und arcosh der hyperbolischen Funktionen sinh und cosh lassen sich über den natürlichen Logarithmus erklären. Zeigen Sie die folgenden beiden Identitäten:

(a) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ für $x \ge 1$.

Lösung:

(a) Es ist $\operatorname{arsinh}(\sinh x) = \ln\left(\sinh x + \sqrt{\sinh^2 x + 1}\right) = \ln\left(\sinh x + \sqrt{\cosh^2 x}\right)$
$= \ln(\sinh x + \cosh x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x) = x$ und
$\sinh(\operatorname{arsinh} x) = \sinh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} = x.$
Daher ist $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ die Umkehrfunktion zu $\sinh x$.

(b) Es ist $\operatorname{arcosh}(\cosh x) = \ln\left(\cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1}\right) = \ln\left(\cosh x + \sqrt{\sinh^2 x}\right)$
$= \ln(\cosh x + \sinh x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right) = \ln(e^x) = x$ und
$\cosh(\operatorname{arcosh} x) = \cosh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} + e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} + e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = x.$
Daher ist $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ die Umkehrfunktion zu $\cosh x$.