Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
24.01.-28.01.11

11. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Grenzwertberechnung)

Berechnen Sie die ersten vier Terme der untenstehenden Folgen. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$\left(a_n = \frac{7n^2}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(b_n = \left(2^{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1} \qquad \left(c_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Lösung: $a_0 = 0,\ a_1 = \frac{7}{4},\ a_2 = \frac{28}{7} = 4,\ a_3 = \frac{63}{10}$

(a_n) ist divergent: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2}{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n}{3+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n}{3} \to \infty$

$b_1 = 4,\ b_2 = 2(2)^{\frac{1}{2}},\ b_3 = 2(2)^{\frac{1}{3}},\ b_4 = 2(2)^{\frac{1}{4}}$

(b_n) ist konvergent: $\lim\limits_{n\to\infty} 2(2)^{\frac{1}{n}} = 2(2)^0 = 2$

$c_0 = 0,\ c_1 \approx 0.4142,\ c_2 \approx 0.3178,\ c_3 \approx 0.2679$

(c_n) ist konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{1+n} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})}{\sqrt{1+n} + \sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n}}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1)} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

Aufgabe G2 (Rekursive Folgen)

Es seien $c, a_0 > 0$ und die rekursiv definierte Folge $a_0 = c, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \quad n \in N$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert. *Tipp:* Weisen Sie zunächst nach, dass die Folge durch $\sqrt{c}$ beschränkt ist (gilt das für alle Folgeglieder?), und zeigen Sie hiermit die Konvergenz der Folge.

Anmerkung: Dieses Näherungsverfahren zur Bestimmung von $\sqrt{c}$ heißt babylonisches Wurzelziehen oder auch Verfahren von Heron. Die Folge konvergiert rasch (genauer gesagt: quadratisch) gegen $\sqrt{c}$ und wird beispielsweise von Taschenrechnern verwendet, um Wurzeln zu ziehen.

Lösung: Beweis von $a_n \geq \sqrt{c}$ für alle $n \geq 1$ bzw. $a_{n+1} \geq \sqrt{c}$ für alle $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &\geq c \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}\left(a_n + \tfrac{c}{a_n}\right)^2 &\geq c \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{a_n^2}{4} + \tfrac{1}{2}c + \tfrac{c^2}{a_n^2} &\geq c \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{a_n^2}{4} - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{c^2}{a_n^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}\left(a_n - \tfrac{c}{a_n}\right)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Für $c < 1$ ist $a_0 < \sqrt{c}$, aber auch in diesem Fall sind a_1 und alle anderen Folgeglieder größer oder gleich $\sqrt{c}$.
Beweis der Monotonie:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{c}{a_n}\right) &\leq a_n \\ \Leftrightarrow \quad a_n + \tfrac{c}{a_n} &\leq 2a_n \\ \Leftrightarrow \quad a_n^2 + c &\leq 2a_n^2 \\ \Leftrightarrow \quad c &\leq a_n^2 \end{aligned}$$

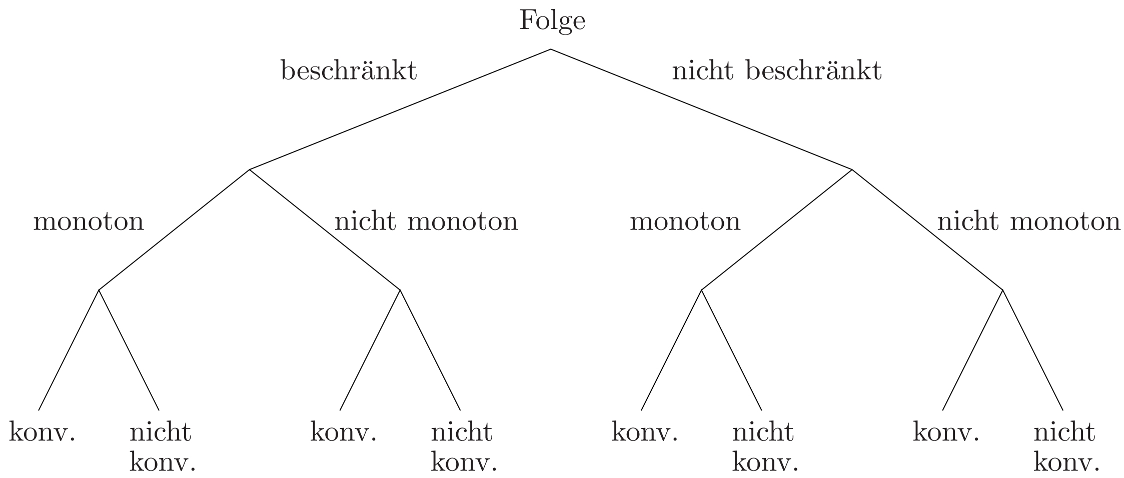
Da wir die Gültigkeit der letzten Ungleichung für $n \geq 1$ bereits bewiesen haben, sind wir fertig. Insgesamt ist die Folge also monoton fallend und beschränkt und folglich konvergent. Somit existiert ein Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dieser Folge, für den gilt:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{c}{a}\right) \\ \Leftrightarrow \quad 2a &= a + \tfrac{c}{a} \\ \Leftrightarrow \quad a^2 &= c \\ \Leftrightarrow \quad a &= \pm\sqrt{c} \end{aligned}$$

Da aber alle Folgenglieder positiv sind und damit auch der Grenzwert, kann nur $a = \sqrt{c}$ gelten.

Aufgabe G3 (Folgen)

Ordnen Sie den Astenden in der folgenden Grafik Folgen mit den an den Ästen angegebenen Eigenschaften zu.



Lösung:

- beschränkt, monoton, konvergent: $(\frac{1}{n^2+1}), ((\frac{4}{5})^n), (\frac{4}{\sqrt{n+1}})$

- beschränkt, monoton, nicht konvergent: existiert nicht
- beschränkt, nicht monoton, konvergent: $(\frac{(-1)^n}{n^2+1}), ((-\frac{4}{5})^n), (\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}})$
- beschränkt, nicht monoton, nicht konvergent: $((-1)^n), (\sin(\frac{\pi}{4} \cdot n)), ((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n})$
- nicht beschränkt, monoton, konvergent: existiert nicht
- nicht beschränkt, monoton, nicht konvergent: $(\sqrt{n+1}), (n^2), (-2^n)$
- nicht beschränkt, nicht monoton, konvergent: existiert nicht
- nicht beschränkt, nicht monoton, nicht konvergent: $((-1)^n \cdot \sqrt{n+1}), ((-1)^n \cdot n^2), ((-2)^n)$

Fazit: Eine nicht beschränkte Folge kann nicht konvergent sein oder anders ausgedrückt: Jede konvergente Folge ist auch beschränkt.

Aufgabe G4 (Konvergenzkriterien für Reihen)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin(n)}{n^5 + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)}$$

Lösung:

(i) $\big($Man kann vorab prüfen, ob die notwendige Bedingung für Konvergenz erfüllt ist, d.h. ob $\frac{n^3+\sin(n)}{n^5+1} \to 0$. Dies ist erfüllt denn $\frac{n^3+\sin(n)}{n^5+1} \leq \frac{n^3+1}{n^5+1} \to 0$. Das Überprüfen der notwendigen Bedingung ist deshalb sinnvoll, weil man - falls die Reihe divergent ist - viel Zeit beim "Ausprobieren" aller Konvergenzkriterien verschwendet.$\big)$

Also ist $\frac{n^3+\sin(n)}{n^5+1} \leq \frac{n^3+1}{n^5+1} \leq \frac{n^3+1}{n^5} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5}$. Da die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ konvergieren, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5}\right)$ und nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\sin(n)}{n^5+1}$.
Da alle Folgeglieder nicht-negativ sind, ist die Reihe absolut konvergent.

(ii) $\big($Wir prüfen wieder erst, ob die notwendige Bedingung für Konvergenz erfüllt ist, d.h. ob $\frac{1000^n}{n!} \to 0$.

Dazu betrachten wir die exp-Funktion: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Da diese Reie für alle x konvergiert (sie ist ja schließlich gleich der e-Fkt), muss für alle x gelten: $\frac{x^n}{n!} \to 0$. Also wächst $n!$ stärker als jede Potenz von x und somit gilt auch $\frac{1000^n}{n!} \to 0.\big)$

Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} \right| = \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \frac{1000^{n+1} n!}{(n+1)! 1000^n} = \frac{1000}{n+1} \to 0 < 1,$$

also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ nach dem Quotientenkriterium konvergent.
Da alle Folgeglieder nicht-negativ sind, ist die Reihe absolut konvergent.

(iii) $\big($Wir prüfen wieder erst, ob die notwendige Bedingung für Konvergenz erfüllt ist, d.h. ob $(-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)} \to 0$.
Es ist $|(-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)}| = \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)} = \frac{n+1}{n^{3/2} - n^{1/2}} \to 0.\big)$

Wir wollen das Leibniz-Kriterium verwenden. Dazu müssen wir zeigen, dass die Folge $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Dass es eine Nullfolge ist, haben wir schon gezeigt. Wir überprüfen die Monotonie:
Dazu überprüfen wir, ob $a_n - a_{n+1}$ positiv oder negativ ist.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)} - \frac{n+2}{\sqrt{n+1} \cdot n} = \frac{n(n+1)\sqrt{n+1} - (n+2)\sqrt{n}(n-1)}{n\sqrt{n}(n-1)n}$$

Da der Nenner für $n \geq 2$ positiv ist, müssen wir nur den Zähler überprüfen:

$$(n^2+n)\sqrt{n+1} - (n^2+n-2)\sqrt{n} = (n^2+n)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + 2\sqrt{n} > 0$$

Also ist a_n monoton fallend. Nach dem Leibniz-Kriterium ist also $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)}$ konvergent.
Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)}$ ist aufgrund der divergenten Minorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent. Demnach ist $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)}$ nicht absolut konvergent.

Hausübung

– Abgabe am 31.01.-04.02.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Grenzwertberechnung) (6 Punkte)

Berechnen Sie die ersten vier Terme der untenstehenden Folgen. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$\left(a_n = \frac{7n^3 - 2n + 4}{8n^3 - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(b_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(c_n = \frac{\cos^2(n\pi)}{\sqrt[3]{n}}\right)_{n\geq 1}$$

Lösung: $a_0 = -4, a_1 = \frac{9}{7}, a_2 = \frac{56}{63}, a_3 = \frac{187}{215}$

(a_n) ist konvergent: $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3-2n+4}{8n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{7-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{8+\frac{1}{n}} = \frac{7}{8}$

$b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -1$

(b_n) ist divergent: Falls a ein Grenzwert wäre, gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a - c_n| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Nach Anwendung der Dreiecksungleichung ist $|a-1+a+1| = |2a| \leq |a-1| + |a+1| < 2\varepsilon$. Weil ε beliebig ist, ist $a = 0$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und jede Wahl von N gibt es ein $n \geq N$ mit $d_n = 1$. Nun ist aber $|0-1| \not< \varepsilon$ ein Wiederspruch, so dass (b_n) keinen Grenzwert hat.

$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ c_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}},\ c_4 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}},$

(c_n) ist konvergent: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos^2(n\pi)}{\sqrt[3]{n}}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

Aufgabe H2 (Funktionenfolgen) (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise Konvergenz und geben Sie ggf. deren Grenzfunktion an:

(i) $f_n = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5];$ (ii) $g_n = \dfrac{nx}{1+n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Lösung:

(i) Für $x \in (0,5]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{x}^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1$$

Für x=0 ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

Also ist (f_n) punktweise konvergent auf [0,5] mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & & x = 0 \\ & \text{für} & \\ 1 & & x \in (0,5] \end{cases}.$$

(ii) Die Funktion (g_n) konvergiert punktweise gegen

$$g(x) = \begin{cases} 0 & & x = 0 \\ -1 & \text{für} & x < 0 \\ 1 & & x > 0 \end{cases}.$$

Aufgabe H3 (Grenzwertsätze) (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweisen Sie die wahren Aussagen. Geben Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist (a_n) eine divergente Folge mit $|a_n| \leq A < \infty$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 0$.

(ii) Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) divergent sind, dann ist auch die Folge $(a_n + b_n)$ divergent.

(iii) Ist (a_n) eine konvergente Folge und ist die Folge (b_n) definiert durch $b_n = a_{n+27}$, dann konvergiert auch (b_n) und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(iv) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, dann folgt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

Lösung:

(i) Das ist wahr. Da die Folge (a_n) divergent ist, folgt $A > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Folge (b_n) gegen 0 konvergiert, existiert zu $\delta := \frac{\varepsilon}{A}$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|b_n| < \delta$ für alle $n \geq N$. Daher gilt für alle $n \geq N$:

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n||b_n| \leq A|b_n| < A\delta = \varepsilon.$$

(ii) Falsch! Betrachte die beiden Folgen (a_n) und (b_n), definiert durch $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$. Beide Folgen sind divergent, aber ihre Summe ist die konstante Nullfolge.

(iii) Richtig. Seien a der Grenzwert der Folge (a_n) und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Konvergenz von (a_n), existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Daher gilt erst recht:

$$|b_n - a| = |a_{n+27} - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

(iv) Falsch. Betrachte die beiden Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-2n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

Aufgabe H4 (Konvergenzkriterien für Reihen) (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n + (-1)^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 7}{70n + 8}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \sin(n)}{ne^n}$ (*Tipp:* Die Exponentialfunktion e^x wächst stärker as jede Potenz von x.)

Lösung:

(i) Es gilt $\frac{(-1)^n}{4n+(-1)^n} \to 0$, also ist $a_n = \frac{1}{4n+(-1)^n}$ eine Nullfolge (und außerdem ist die notwendige Bedingung für die Konvergenz erfüllt).
Um das Leibniz-Kriterum anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass a_n monoton fallend ist.

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = (4n + (-1)^n) - \big(4(n + 1) + (-1)^{n+1}\big) = -4 + 2(1-)^n < 0,$$

also ist $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_{n+1}}$ und somit $a_n > a_{n+1}$. Deshalb ist a_n eine monoton fallende Nullfolge und nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.
Die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{4n+(-1)^n}\right|$ ist aufgrund der divergenten Minorante $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{5n}$ divergent. Demnach ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n + (-1)^n}$ nicht absolut konvergent.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{70n+8}$ ist divergent (also erst recht nicht absolut konvergent), denn $\frac{2n+7}{70n+8}$ konvergiert gegen $\frac{2}{70}$ und nicht gegen 0.

(iii) Die notwendige Bedingung für die Konvergenz ist erfüllt, denn $\frac{2n+\sin(n)}{ne^n} \leq \frac{2n+1}{ne^n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{e^n} \to 0$.
Da e^x stärker wächst als jede Potenz von x, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $e^{n_0} \geq (n_0)^2$ ist. (Das gilt sogar für alle $n_0 \in \mathbb{N}$, ist aber aufwendiger zu zeigen.)

Also gilt für $n \geq n_0$:

$$\frac{2n + \sin(n)}{ne^n} \leq \frac{2n + 1}{ne^n} = \frac{2}{e^n} + \frac{1}{ne^n} \leq \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n \cdot n^2} \leq \frac{3}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, also ist nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\sin(n)}{ne^n}$ konvergent.
Da alle Folgeglieder nicht-negativ sind, ist die Reihe somit auch absolut konvergent.