Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
17.1.-21.1.11

10. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Potenzen der imaginären Einheit)

Berechnen Sie

a) $i^{123456789}$

b) $\sum_{k=1}^{123456789} i^k$

und geben Sie das Ergebnis in der Standardform $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung:

a) Wir wissen, dass $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$. Daher (eigentlich streng genommen mit Induktion) folgt dass $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da die Zahl 123456789 bei Division durch 4 Rest 1 besitzt, gilt also $i^{123456789} = i$.

b) Wir sehen dass $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$. Demensprechend gilt (Induktion!): $\sum_{k=1}^{4n} i^k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Zahl 123456788 bei Division durch 4 Rest 0 besitzt, gilt also

$$\sum_{k=1}^{123456789} i^k = \sum_{k=1}^{123456788} i^k + i^{123456789} = 0 + i = i.$$

Aufgabe G2 (Wurzeln komplexer Zahlen)

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen jeweils in der komplexen Zahlenebene.

(a) $z^2 = -9$ (b) $z^3 = 8i$ (c) $\frac{z-1}{2} = \frac{\frac{i}{2}}{z+1}$ $(z \neq -1)$

Lösung:

(a) $z^2 = -9 \overset{!}{=} (re^{i\varphi})^2 = r^2 e^{2i\varphi}$
$\Rightarrow r = 3$ und $e^{2i\varphi} \overset{!}{=} -1 = e^{i\pi} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$
$\Rightarrow z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$, $z_2 = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i$.

(b) $z^3 = 8i \overset{!}{=} (re^{i\varphi})^3 = r^3 e^{3i\varphi}$
$\Rightarrow r = 2$ und $e^{3i\varphi} \overset{!}{=} i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{5}{6}\pi$, $\varphi_3 = \frac{9}{6}\pi$
$\Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{\frac{5}{6}\pi}$, $z_3 = 2e^{\frac{9}{6}\pi}$.

(c) $\frac{z-1}{2} = \frac{\frac{i}{2}}{z+1} \overset{z\neq -1}{\Leftrightarrow} (z+1)(z-1) = i \Leftrightarrow z^2 - 1 = i \Leftrightarrow z^2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \overset{!}{=} (re^{i\varphi})^2 = r^2e^{2i\varphi}$
$\Rightarrow r = \sqrt[4]{2}$ und $e^{2i\varphi} \overset{!}{=} e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{8},\ \varphi_2 = \frac{9}{8}\pi$
$\Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}},\ z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9}{8}\pi}$.

Aufgabe G3 (Komplexer Logarithmus)

Geben Sie die Werte folgender komplexer Zahlen

a) $ln(2+3i)$

b) $ln(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{i})$

in der Form $a + ib$ mit reellen Komponenten $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung:

a) $ln(2+3i) = ln(\sqrt{13}) + iarctan(\frac{3}{2})$.

b) Zunächst sehen wir, dass $\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wir sehen, dass $|\sqrt{i}| = 1$ gilt, und dass arg $(\sqrt{i}) = \frac{\pi}{4}$. Nun gilt: $ln(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{i}) = ln(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + iarctan(1) = ln(1/2) + ln(2^{1/2}) + i\frac{\pi}{4} = ln(1) - ln(2) - \frac{1}{2}ln(2) + i\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}ln(2) + i\frac{\pi}{4}$.

Hausübung

– Abgabe am 24.1.-28.1.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Potenzen von komplexen Zahlen) (4 Punkte)

Berechnen Sie

a) $(1+i)^{1002}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{i}}$

und geben Sie das Ergebnis in der Form $a + ib$ mit reellen Komponenten a und b an.

Lösung:

a) Es gilt $(1+i)^{1002} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{1002} = 2^{501}e^{\frac{501}{2}\pi i} = 2^{501}e^{250\pi i}e^{\frac{1}{2}\pi i} = 2^{501}i$.

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{i}} = \left(\frac{1}{e^{i\pi/2}}\right)^{1/3} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6)$.

Aufgabe H2 (Komplexe Polynome) (5 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ Lösung der Gleichung ist.

Lösung: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 &= a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_nz^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0} \\ &= \overline{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch $\overline{z}$ eine Lösung der Gleichung.

Aufgabe H3 (Wurzeln komplexer Zahlen) (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 + 81i = 0$ unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

Lösung: $z^4 + 81i = 0 \Leftrightarrow z^4 = -81i \overset{!}{=} (re^{i\varphi})^4 = r^4 e^{4i\varphi}$
$\Rightarrow r = 3$ und $e^{4i\varphi} \overset{!}{=} -i = e^{i\frac{3}{2}\pi} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3}{8}\pi$, $\varphi_2 = \frac{7}{8}\pi$, $\varphi_3 = \frac{11}{8}\pi$, $\varphi_4 = \frac{15}{8}\pi$
$\Rightarrow z_1 = 3e^{i\frac{3}{8}\pi}$, $z_2 = 3e^{i\frac{7}{8}\pi}$, $z_3 = 3e^{i\frac{11}{8}\pi}$, $z_4 = 3e^{i\frac{15}{8}\pi}$. . Für die richtige Skizze noch .

Aufgabe H4 (Geraden und Kreise in der komplexen Zahlenebene) (6 Punkte)

Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $a\overline{a} - st > 0$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $sz\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} = 0$

(a) für $s = 0$ eine Gerade

(b) für $s \neq 0$ einen Kreis

in der komplexen Ebene beschreibt. Bestimmen Sie in (b) insbesondere Mittelpunkt und Radius des Kreises.

Lösung:

(a) Ist $s = 0$, so reduziert sich die Gleichung zu: $\overline{a}z + a\overline{z} = 0$. Setze $a := a_1 + ia_2$ und $z := x + iy$, a_1, a_2, x, $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a_1 - ia_2)(x + iy) + (a_1 + ia_2)(x - iy) = 2a_1x + 2a_2y \overset{!}{=} 0,$$

und somit $a_1x + a_2y = 0$, was die Gleichung einer Geraden ist.

(b) Ist $s \neq 0$, so gilt

$$s(x + iy)(x - iy) + (a_1 - ia_2)(x + iy) + (a_1 + a_2)(x - iy) = s(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2a_2y \overset{!}{=} 0,$$

und somit $x^2 + y^2 + \frac{2a_1}{s}x + \frac{2a_2}{s}y = 0$, was sich mit quadratischer Ergänzung zu der Kreisgleichung $(x + \frac{a_1}{s})^2 + (y + \frac{a_2}{s})^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{s^2}$ ergänzen lässt. Der Mittelpunkt des Kreises ist somit $M = (-\frac{a_1}{s}, -\frac{a_2}{s})$, sein Radius $r = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{s}$.