Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
10.01.-14.01.11

9. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Koordinatentransformation)
Die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$) gegeben.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung: Sei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist S die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung, die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B auf Koordinatenvektoren bezüglich der Standardbasis E abbildet. Dann folgt für die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis B

$$[f]_B = S^{-1}[f]_E S.$$

Dabei ist die Inverse von S gegeben durch

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$[f]_B = S^{-1}[f]_E S = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Diagonalisierung)
Gegeben seien folgende Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen.

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Welchen Beziehung sehen Sie zwischen der Häufigkeit eines Eigenwertes als Nullstelle des char. Polynoms und der Dimension des zugehörigen Eigenraums?

(d) Geben Sie für $k = 1, \ldots, 4$ – falls möglich – eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S an, für die $A_k = SDS^{-1}$ gilt.

Lösung: *(vier Gruppen bilden und je eine Matrix bearbeiten lassen)*

(a) Eigenwerte: Bestimme λ so, dass $\det(A_k - \lambda E) = 0$ gilt.

- $\det(A_1 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$
- $\det(A_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$
- $\det(A_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = 5 - 4\lambda + \lambda^2 \overset{!}{=} 0$
  $\Rightarrow \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i.$
- $\det(A_4 - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & i \\ -i & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = \lambda(\lambda - 2) \overset{!}{=} 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2.$

(b) Zugehörige Eigenvektoren: Wegen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0 \Rightarrow (A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, bekommt man die zugehörigen Eigenvektoren (zuzüglich $\mathbf{0}$) als Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. D.h. die zu λ gehörenden Eigenvektoren liegen im Kern von $(A - \lambda E)$.

- Zu A_1:
  $\lambda = 1$: $(A_1 - E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  LGS: $(A_1 - E)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = \alpha$ freier Parameter.
  $\Rightarrow \text{Kern}(A_1 - E) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$
- Zu A_2:
  $\lambda = 1$: $(A_2 - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  LGS: $(A_2 - E)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ und $x_1 = \alpha$ und $x_2 = \beta$ freie Parameter.
  $\Rightarrow \text{Kern}(A_2 - E) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

- Zu A_3:

  $\lambda_1 = 2+i$: $(A_3 - (2+i)E) = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

  LGS:
$$\begin{array}{cc|ll}
x_1 & x_2 & & \\
\hline
-i & -1 & 0 & \text{Zeilentausch mit 2. Zeile} \\
1 & -i & 0 & \text{Zeilentausch mit 1. Zeile} \\
\hline
1 & -i & 0 & \\
-i & -1 & 0 & \text{2.Zeile } +i\cdot \text{ 1. Zeile} \\
\hline
1 & -i & 0 & \Rightarrow x_1 = \alpha i,\ x_2 = \alpha \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

  $\Rightarrow \mathrm{Kern}(A_3 - (2+i)E) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\right\}$

  $\lambda_2 = 2-i$: $(A_3 - (2-i)E) = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

  LGS:
$$\begin{array}{cc|ll}
x_1 & x_2 & & \\
\hline
i & -1 & 0 & \text{Zeilentausch mit 2. Zeile} \\
1 & i & 0 & \text{Zeilentausch mit 1. Zeile} \\
\hline
1 & i & 0 & \\
i & -1 & 0 & \text{2. Zeile } -i\cdot \text{ 1. Zeile} \\
\hline
1 & i & 0 & \Rightarrow x_1 = -\alpha i,\ x_2 = \alpha \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

  $\Rightarrow \mathrm{Kern}(A_3 - (2-i)E) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\right\}$

- Zu A_4:

  $\lambda_1 = 0$: $(A_4 - 0E) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

  LGS:
$$\begin{array}{cc|ll}
x_1 & x_2 & & \\
\hline
1 & i & 0 & \\
-i & 1 & 0 & \text{2. Zeile } +i\cdot \text{ 1. Zeile} \\
\hline
1 & i & 0 & \Rightarrow x_1 = -\alpha i,\ x_2 = \alpha \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

  $\Rightarrow \mathrm{Kern}(A_4 - 0E) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\right\}$

  $\lambda_2 = 2$: $(A_4 - 2E) = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$

  LGS:
$$\begin{array}{cc|ll}
x_1 & x_2 & & \\
\hline
-1 & i & 0 & \\
-i & -1 & 0 & \text{2. Zeile } -i\cdot \text{ 1. Zeile} \\
\hline
-1 & i & 0 & \Rightarrow x_1 = \alpha i,\ x_2 = \alpha \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

  $\Rightarrow \mathrm{Kern}(A_4 - 2E) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\right\}$

(c) Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ einer Matrix M ist höchstens so groß wie die Häufigkeit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms von M.

Wie man an den Matrizen A_1 und A_2 erkennt, kann es durchaus weniger linear unabhängige Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ geben. In diesem Fall sind die entsprechenden Matrizen nicht diagonalisierbar.

(d) Die Matrizen A_1 und A_2 sind, wie unter (c) beschrieben, nicht diagonalisierbar. Die Matrizen A_3 und A_4 sind diagonalisierbar, da jeweils für jeden der zwei Eigenwerte ein Eigenvektor existiert.
Im Falle von A_3 erhalten wir $D = diag(2+i, 2-i)$ und den Basiswechsel

$$S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Falle von A_4 erhalten wir $D = diag(0, 2)$ und den Basiswechsel

$$S = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Eigenwerte und Drehungen)
Es sei $|\theta| \leqslant \pi$. Betrachten Sie die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Eigenwerte von D in Abhängigkeit von θ.

(b) Für welche θ sind die Eigenwerte reell?

(c) Wie kann man den Umstand geometrisch interpretieren, dass D nur für wenige θ reelle Eigenwerte hat?

Lösung:

(a) $(D - \lambda E) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\det(D - \lambda E) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 \stackrel{!}{=} 0$
$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$
Die Eigenwerte von D sind also $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ und $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$.

(b) Die Eigenwerte von D werden genau dann reell, wenn der Imaginärteil verschwindet. Das ist genau dann der Fall, wenn $\sin\theta = 0$, also $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ist.

(c) Geometrische Interpretation:
D ist eine Drehung um den Winkel θ um den Ursprung. Für die Winkel $\theta = \pm\pi$ und $\theta = 0$ geht die Drehung in eine Spiegelung am Ursprung bzw. in die identische Abbildung über.
Nur in diesen Fällen haben wir im geometrischen Sinne Streckungen (ggf. mit Vorzeichenwechsel).

Hausübung

– Abgabe am 17.01.-21.01.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Koordinatentransformation) (3 Punkte)

Die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$) gegeben.
Bestimme die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung: Sei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist S die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung, die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B auf Koordinatenvektoren bezüglich der Standardbasis E abbildet.
Dann folgt für die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis B

$$[f]_B = S^{-1}{}_E M_E(f) S.$$

Es ist zunächst die Inverse von S zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I-II \\ III-2II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-\frac{1}{2}III \\ II+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Folglich gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} [f]_B = S^{-1}[f]_E S &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Überprüfung von Eigenwerten und Eigenvektoren) (5 Punkte)

$$\text{Betrachten Sie } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist 2 Eigenwert von A? Begründung!

(b) Prüfen Sie, ob die folgenden Vektoren Eigenvektoren von A sind und geben Sie gegebenenfalls die zugehörigen Eigenwerte an:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es ist nicht immer nötig, Determinanten zu berechnen.

Lösung:

(a) 2 ist Eigenwert von A.
Prüfe, ob der Rang von $(A - 2E)$ kleiner als 3 ist. Falls ja, dann ist 2 ein Eigenwert

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Eine Nullzeile, d.h. Rang maximal 2}$$

Andere Möglichkeit: für $\mathbf{x} = (0, 1, 0)^\top$ gilt

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}.$$

(b) Zu einem Eigenvektor $\mathbf{x}$ von A gibt es einen Eigenwert λ, so dass $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ gilt.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow$ kein Eigenvektor von A.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow$ Eigenvektor von A zum Eigenwert -1.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow$ kein Eigenvektor von A.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow$ Eigenvektor von A zum Eigenwert 3.

Aufgabe H3 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren) (5 Punkte)

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & 1 \\ 2 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} \overset{\text{Entwickeln nach der letzten Zeile}}{=}$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2-4] = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = (2-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

  Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$.

- Berechnung der Eigenvektoren:
  - zu $\lambda_1 = -1$:

    $$(A+E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

    LGS: $(A+E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = -\alpha,\ x_2 = \alpha$ und $x_3 = 0$

    $$\Rightarrow \text{Kern}(A+E) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

  - zu $\lambda_2 = 2$:

    $$(A-2E) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    LGS: $(A-2E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = \alpha,\ x_2 = \alpha$ und $x_3 = -\alpha$

    $$\Rightarrow \text{Kern}(A-2E) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

  - zu $\lambda_3 = 3$:

    $$(A-3E) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    LGS: $(A-3E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = \alpha,\ x_2 = \alpha$ und $x_3 = 0$

    $$\Rightarrow \text{Kern}(A-3E) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe H4 (Symmetrische Matrizen) (7 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Warum sind diese reell?

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren und normieren Sie diese.

(c) Sei Q die Matrix, die die normierten Eigenvektoren von A als Spalten hat. Ist diese Matrix orthogonal?

(d) Was ist Q^{-1}? Bestimmen Sie $D = Q^{-1}AQ$, was stellen Sie fest?

Lösung:

(a) Eigenwerte von A sind

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3.$$

Diese sind reell, weil $A = A^\top$ symmetrisch ist.

(b)

$$
\begin{array}{rrr|l}
\multicolumn{3}{l}{(A-0E)\mathbf{x}} & \qquad\qquad = \mathbf{0} \\
1 & -1 & 0 & \\
-1 & 2 & -1 & II + I \\
0 & -1 & 1 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & \\
0 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & III + II \\
\hline
1 & -1 & 0 & I + II \\
0 & 1 & -1 & \\
0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & \\
0 & 1 & -1 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$x_3 = t,\ \text{freier Parameter}$$

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{q}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
\multicolumn{3}{l}{(A-E)\mathbf{x}} & \qquad\qquad = \mathbf{0} \\
0 & -1 & 0 & \\
-1 & 1 & -1 & II \leftrightarrow I \\
0 & -1 & 0 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & III - II \\
\hline
-1 & 1 & -1 & I + II \\
0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \\
\hline
-1 & 0 & -1 & \\
0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$x_3 = t,\ \text{freier Parameter}$$

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{q}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
-2 & -1 & 0 & \\
-1 & -1 & -1 & II \leftrightarrow I \\
0 & -1 & -2 & \\
\hline
-1 & -1 & -1 & \\
-2 & -1 & 0 & II - 2I \\
0 & -1 & -2 & \\
\hline
-1 & -1 & -1 & \\
0 & 1 & 2 & \\
0 & -1 & -2 & III + II \\
\hline
-1 & -1 & -1 & I + II \\
0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & \\
\hline
-1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$x_3 = t,$ freier Parameter

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$Q = (\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2,\ \mathbf{q}_3)$$

Q ist orthogonal ($Q^\top Q = E$). Kann bei symmetrischen Matrizen immer so konstruiert werden. Bei symmetrischen Matrizen sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal.

(d) Da Q orthogonal ist ist $Q^{-1} = Q^\top$.

$$D = Q^{-1}AQ = Q^\top AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

D ist eine Diagonalmatrix, auf der Diagonalen stehen die Eigenwerte. Gleichung $D = Q^{-1}AQ$ kann man auch ohne Rechnen durch Vergleich der Spalten von $AQ = QD$ sehen:

$$AQ = (A\mathbf{q}_1, A\mathbf{q}_2, A\mathbf{q}_3) = (\mathbf{0}, \mathbf{q}_2, 3\mathbf{q}_3) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = QD$$