Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
16.12.-22.12.10

8. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Matrixinversion mit Gauß-Algorithmus)
Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Algorithmus.

Lösung: Wir berechnen die Inverse von A mit dem Gauß-Algorithmus wie folgt:

$$\begin{array}{rrr|rrr}
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -4 & -9 & 4 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 19 & -8 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

In der rechten unteren Ecke steht nun die Inverse von A.

Aufgabe G2 (Zusammengesetzte lineare Abbildungen)
Wir betrachten die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in z-Richtung auf die x-y-Ebene projiziert und anschließend um die z-Achse um $90°$ dreht.

(i) Finden Sie die Abbildungsmatrix C für diese lineare Abbildung T.

(ii) Finden Sie die Abbildungsmatrizen A für die orthogonale Projektion auf die x-y-Ebene und B für die Drehung um 90° um die z-Achse.

(iii) Berechnen Sie AB und BA.

(iv) Wir erwarten $C = BA$, erklären Sie geometrisch, warum auch $C = AB$ gilt.

(v) Gilt immer $BA = AB$ für Abbildungsmatrizen, die eine zusammengesetzte lineare Abbildung beschreiben?

Lösung:

(i) Durch Abbilden der Basisvektoren oder geometrische Überlegung finden wir

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) $BA = C = AB$.

(iv) Es führt auf das gleiche Ergebnis, erst zu Drehen und dann zu projizieren oder erst zu projizieren und dann zu drehen. Dies liegt daran, daß die Projektion entlang der Drehachse verläuft und auf der Drehebene identisch wirkt. Dies ist jedoch keinesfalls der Normalfall!

(v) Betrachten wir im $\mathbb{R}^2$ eine Drehung um 90° um den Ursprung und die Projektion auf die x-Achse, so komuutieren diese beiden Abbildungsmatrizen nicht:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

Aufgabe G3 (Aufstellen einer Matrix)

Stellen Sie die Matrix der Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf, die die Vektoren $(1,1)^T$ auf $(1,2)^T$ und $(1,-1)^T$ auf $(2,1)^T$ abildet. Auf welche Vektoren werden $(1,0)^T$ und $(0,1)^T$ abgebildet?

Lösung: Die gesuchte Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ muss

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Dies liefert folgendes LGS:

$$\begin{aligned} I: \quad a+b &= 1 \\ II: \quad c+d &= 2 \\ III: \quad a-b &= 2 \\ IV: \quad c-d &= 1. \end{aligned}$$

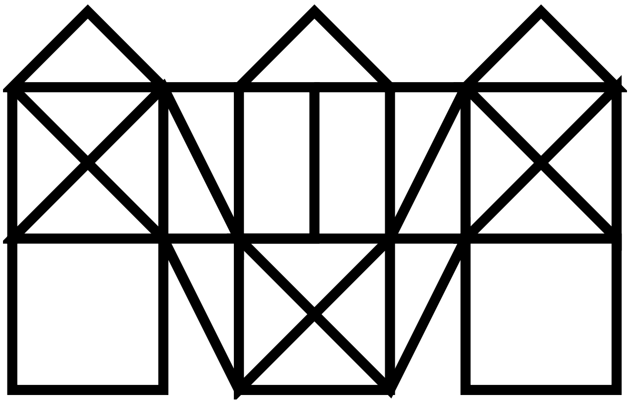
$1/2*(I+III)$: $a=3/2$. Dies in I liefert: $b=-1/2$.
$1/2*(II+IV)$: $c=3/2$, woraus sich $d=-1/2$ ergibt.
Also lautet die gesuchte Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $A(1,0)^T = (3/2, 3/2)^T$ und $A(0,1)^T = (-1/2, 1/2)^T$.

Aufgabe G4 (Das neue Haus vom Nikolaus)

Abbildung 1: Das große Haus vom Nikolaus



Die vielen Geschenke, die von Jahr zu Jahr mehr werden, passen leider nicht mehr in das kleine Haus vom Nikolaus. Deshalb hat der Nikolaus jetzt ein neues, viel größeres Haus gebaut (Abbildung 1). Kann man dieses größere Haus vom Nikolaus immer noch komplett in einem Zug zeichnen, ohne den Stift dabei abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu malen?

Hausübung

– Abgabe am 10.1.-14.1.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Existenz der Inversen und Inversenberechnung) (6 Punkte)
Sind folgende Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie im Falle der Invertierbarkeit die Inverse.

Lösung: Wieder fangen wir an, die Inverse von B mit dem Gauß-Algorithmus auszurechnen:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
\hline
2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & \dots & & & \dots & \\
\hline
2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\
\hline
\end{array}$$

Hier führt der Ansatz jedoch auf eine Widersprüchliche Gleichung. Damit ist B nicht invertierbar. Alternativ hätten wir auch die Determinante von B ausrechnen können, $\det(B) = 0$ hätte ebenfalls ergeben, daß B nicht invertiert werden kann. 3 P.
Nun, dasselbe für C. Der Gauß-Algorithmus liefert:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1/3 & 5/3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Die Inverse können wir jetzt rechts ablesen. 3 P..

Aufgabe H2 (Drehungen in $\mathbb{R}^3$) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, daß

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix ist.

(ii) Bestimmen Sie den Drehwinkel φ.

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{v}$, welcher die Drehachse erzeugt, mit $v_3 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Lösung:

(i) Die Abbildung ist orthogonal, da $A^T \cdot A = E$. Da $\det(A) = 1$ ist die Abbildung eine Drehung. 1 P.

(ii) Aus $\mathrm{tr}(A) = -\frac{1}{2}$ folgt mit der Formel im Skript $\varphi = \arccos(-\frac{3}{4}) \approx 138{,}6°$. 1 P.

(iii) Wir stellen das Gleichungssystem für den Vektor $\mathbf{v}$ auf:

$$\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & \\ \hline -\frac{3}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & (\frac{1}{\sqrt{2}}-1) & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 3 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3+2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -2+\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}$$

wählen wir

$$v_3 = 3 + 2\sqrt{2},$$

so folgt

$$v_2 = -1 \quad \text{und} \quad v_1 = -1 - \sqrt{2}.$$

Dies ist die Drehachse der Drehung. 2 P.

Aufgabe H3 (Orthogonale Projektion auf eine Ebene) (4 Punkte)

Gegeben sei die Ebene $E : \lambda(1, 0, -1)^T + \mu(1, -2, 1)^T$ in Parameterform.

(i) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\mathbf{n}$ zur Ebene.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion P auf E, sowie deren Rang.

Lösung:

(i) Mittels Kreuzprodukt erhalten wir

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2 P.

(ii) Wir normieren den Normalenvektor und erhalten

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir die orthogonale Projektion mittels Formel im Skript:

$$P = E - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da das Bild von P zweidimensional, nämlich die Ebene E ist, ist der Rang 2. 2 P.

Aufgabe H4 (Aufstellen einer Matrix) (6 Punkte)

Stellen Sie die Matrix der linearen Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf, die die Vektoren $(1,0,0)^T$ auf $(1,1,0)^T$, sowie $(1,1,0)^T$ auf $(1,1,1)^T$ und schließlich $(1,1,1)^T$ wieder auf $(1,0,0)^T$ abbildet. Auf welche Vektoren werden die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ unter dieser Abbildung abgebildet?

Lösung: Die gesuchte Matrix A muss

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Dies liefert zunächst $a_{11} = 1$, $a_{21} = 1$ und $a_{31} = 0$. Im zweiten Schritt isz dann das System

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Es ergibt sich: $a_{12} = a_{22} = 0$ und $a_{32} = 1$. Schließlich ist noch das letzte System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Es ergibt sich direkt: $a_{13} = 0$ und $a_{23} = a_{33} = -1$. Die gesuchte Matrix ist somit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{5 P.}$$

Die Bilder der Einheitsvekttoren sind genau die Spaltenvektoren der Matrix. D.h. $\psi(\mathbf{e}_1) = (1,1,0)^T$, $\psi(\mathbf{e}_2) = (0,0,1)^T$ und $\psi(\mathbf{e}_3) = (0,-1,-1)^T$. 1 P.

Wiederholungsaufgaben

Wiederholungsaufgabe 1 (Abstand windschiefer Geraden)
Gegeben seien folgende Geraden

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$h : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass g und h windschief zueinander sind, d.h. g ist nicht parallel zu h und haben auch keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

b) Zeigen Sie, dass g und h in zwei parallel zueinander verlaufenden Ebenen liegen und bestimmen Sie diese.

c) Berechnen Sie den Abstand beider Geraden g und h.

Lösung:

a) Dass g nicht parallel zu h ist, sehen wir sofort an den Richtungsvektoren. Stellen wir also nun die Schnittbedingungen auf. Ein gemeinsamer Schnittpunkt müsste folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha &= -\beta & (1) \\ \alpha &= 1 + \beta & (2) \\ -1 &= 1 + 3\beta. & (3) \end{aligned}$$

Addition von Gl. (1) und Gl. (2) liefert sofort $\alpha = 0$; wenn wir dies in Gl. (2) einsetzen bekommen wir $\beta = -1$. Gl. (3) jedoch liefert dann einen Widerspruch, $-1 = 1 - 3$.

b) Der Vektor

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf g und h zugleich. Die Ebene

$$E_1 : 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

enthält die Gerade g und die Ebene

$$E_2 : 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1$$

enthält die Gerade h. Beide Ebenen sind per Konstruktion parallel zueinander.

c) Der Abstand von g und h ist gleich dem Abstand beider Ebenen E_1 und E_2, d.h.

$$d = |\frac{3}{\sqrt{22}} * 0 - \frac{3}{\sqrt{22}} * 1 + 2\frac{2}{\sqrt{22}} * 1 - \frac{1}{\sqrt{22}}| = \frac{2}{\sqrt{22}}.$$

Wiederholungsaufgabe 2 (Gleichungen Ungleichungen)

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die der Ungleichung

$$\frac{x-2}{x^2-4} \leq 0, \qquad x \neq \pm 2$$

genügen.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{x+1}{x^2+1} = 1?$$

c) Für welche komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z-1| = |\overline{z}+1|$?

Lösung

a) Die Werte ± 2 müssen für x ausgeschlossen werden, da andernfalls der Nenner null wird. Wegen Vorzeichenwechsel im Nenner haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Im Falle $|x| > 2$ ist die Bedingung $\frac{x-2}{x^2-4} \leq 0$ äquivalent mit der Bedingung $x-2 \leq 0$. Da die Werte $x = \pm 2$ nicht zugelassen sind, ist die Lösungsmenge in diesem Fall lediglich die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$, zumal vorausgesetzt wurde, dass $|x| > 2$ sein soll.

   Im anderen Fall $|x| < 2$ ist $\frac{x-2}{x^2-4} \leq 0$ äquivalent mit der Bedingung $x - 2 \geq 0$. Diese Bedingung wird jedoch von keinen reellen Zahlen mit $|x| < 2$ erfüllt.

b) Da $x^2+1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, kann man auf beiden Seiten der Gleichung mit dem Nenner multiplizieren und obige Bedingung ist dann äquivalent zu der Bedingung $x+1 = x^2+1$, also $x(x-1) = 0$. Die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind aber 0 und 1.

c) Nach Aufgabe G2 vom 2. Übungsblatt gilt: $|\overline{z}+1| = |\overline{z+1}| = |z+1|$. Die Bedingung $|z-1| = |z+1|$ wird durch diejenigen Punkte der komplexen Ebene erfüllt, die von 1 und -1 gleich weit entfernt sind. Das sind genau die Zahlen aus $\mathbb{C}$, die auf der imaginären Achse liegen, also alle die $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) = 0$.