Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
02.12.-15.12.10

7. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Hinweis: In der Woche vom 06.12.-10.12.10 finden aufgrund der Veranstaltung „Einführung in den Maschinenbau“ keine Vorlesungen und Übungen statt. Dieses Blatt wird in den Übungen am 2./3.12.10 sowie 13./15.12.10 behandelt. Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in den Übungen vom 16.-22.12.10. Die Übungen im neuen Jahr starten am 10.01.11.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Berechnung von Determinanten)

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten (ohne lange Rechnungen!):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 21 & -2 & 17 \\ 2 & -5 & -4 & -1 \\ -3 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & -43 & -16 & 36 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\det\begin{pmatrix} 1 & 21 & -2 & 17 \\ 2 & -5 & -4 & -1 \\ -3 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & -43 & -16 & 36 \end{pmatrix} = 0$ (die 1. und die 3. Spalten sind proportional).

$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = -5!$ (Entwicklung nach der 1. Spalte)

Aufgabe G2 (Eigenschaften von Determinanten)

Für a, $b \in \mathbb{C}$ seien folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & 3 & b \end{pmatrix}.$$

In Abhängigkeit von den Parametern, beantworten Sie die folgenden Fragen für A und B:

(a) Berechnen Sie die Determinante.

(b) Ist der Rang maximal?

(c) Sind die Zeilen/Spalten linear unabhängig?

(d) Ist die Matrix invertierbar? Für die Werte $a = 0$ und $b = 0$ bestimmen Sie die entsprechenden Inversen. Verwenden Sie dazu die Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T.$$

Dabei sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $A^* = (a^*_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ihre adjungierte Matrix, d.h. $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ und A_{ij} entstehe aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

(e) Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von $A^{-1}CA$ und vergleichen Sie sie mit der Determinanten von C.

Lösung:

(a) $\det A = 2 - a$, $\det B = 2i + ib$.

(b) $\operatorname{rang} A = \begin{cases} 2, a \neq 2, \\ 1, a = 2, \end{cases}$, $\operatorname{rang} B = \begin{cases} 3, b \neq -2, \\ 2, b = -2. \end{cases}$

(c) Für $a = 2$, $b = -2$ sind die Zeilen und Spalten linear abhängig, sonst nicht.

(d) Für $a = 2$, $b = -2$ sind die Matrizen nicht invertierbar. Für $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Für $b = 0$: $B = \begin{pmatrix} i & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 3 & i & i \\ 3 & i & -i \\ 1 & i & i \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3i & -3i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) $A^{-1}CA = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 - 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\det A^{-1}CA = \det C = 1$.

Aufgabe G3 (Dreiecksmatrizen)

Seien A und B obere Dreiecksmatrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Die folgende Gleichung für Determinanten wurde bereits in der VL betrachtet, allerdings ohne Beweis. Hier wollen wir diese für obere Dreiecksmatrizen nachweisen. Zeigen Sie:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

(b) Folgern Sie mit Hilfe von (a), dass $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ gilt, falls A invertierbar ist.

(c) Was kann über die Einträge von A gesagt werden, falls A invertierbar ist?

(d) Gilt die Gleichung aus (a) auch für untere Dreiecksmatrizen?

Lösung:

(a) AB ist wieder eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $a_{ii}b_{ii}$ für $i = 1, \ldots, n$. Also gilt

$$\det(AB) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot \prod_{i=1}^{n} b_{ii} = \det(A) \det(B).$$

(b) Folgt aus (a) für $B = A^{-1}$ wegen $1 = \det(A) \det(A^{-1})$.

(c) Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind ungleich Null.

(d) Wenn C eine untere Dreiecksmatrix ist so ist C^T eine obere Dreiecksmatrix. Aus $\det(C) = \det(C^T)$ folgt, dass die Gleichung aus (a) auch für untere Dreiecksmatrizen gilt.

Hausübung

– Abgabe am 16.12.-22.12.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Berechnung von Determinanten) (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$

(a) mittels der Entwicklung nach Zeilen oder Spalten

(b) mittels elementarer Umformungen zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Lösung:

(a) Für die Matrix A macht man z.B. die Entwicklung nach der 3. Zeile:

$$\det A = (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -8.$$

(b) Mithilfe elementarer Umformungen (Tauschen der 1. und 4. Spalte, Tauschen der 1. und 2. Zeile, Addieren der 1. auf die 4. Zeile, Addieren der (-4)-fachen 3. Zeile auf die vierte) erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8 \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Inverse einer Matrix) (4 Punkte)

Mit Hilfe von Determinanten bzw. adjungierten Matrizen bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ -3 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 19 & -16 & 33 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ -3 & -10 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -7/2 & 2 & 7/2 \\ 29 & -17 & -30 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (Vandermonde-Matrix) (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Gleichung für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\det V = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b).$$

Lösung: Subtrahieren der zweiten Spalte von der ersten und anschließendes Entwickeln nach der ersten Zeile ergeben

$$\begin{aligned} \det V &= \det \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{pmatrix} \\ &= (a-c)(b^2-c^2) - (b-c)(a^2-c^2) = (a-c)(b-c)(b+c) - (b-c)(a-c)(a+c) \\ &= (a-b)(a-c)(c-b). \end{aligned}$$

Aufgabe H4 (Rechenregeln) (6 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ invertierbar. Weiter gelte $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$ gilt.

(b) Sei $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ eine obere Dreiecksmatrix und invertierbar. Es gelte $\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$. Zeigen Sie, dass $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt $\det(A) \in \mathbb{Z}$ und $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt $1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$. Damit folgt die Behauptung.

(b) A^{-1} ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. Aus der Voraussetzung folgt, dass $a_{ii}, a_{ii}^{-1} = \pm 1$ für $i = 1, 2$. Weil $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ und $AA^{-1} = E_2$ gilt, ist $a_{12}^{-1} \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt die Behauptung.