Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
25.11.-01.12.10

6. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Gleichungssysteme)

Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem (i) genau eine Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen, (iii) keine Lösung?
Bestimmen Sie die Lösungsmengen für alle drei Fälle. Geben Sie bei der Ausführung des Gauß-Algorithmus bitte alle Elementarumformungen an.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a^2-5)x_3 & = & a \end{array}$$

Lösung:
Mit dem Gaußschen Algorithmus erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right).$$

Also

(i) für $a \neq 2$ und $a \neq -2$ hat das LGS eindeutige Lösung:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 1+3\frac{1}{a+2} \\ 1-2\frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{pmatrix} \}$$

(ii) für $a = 2$.

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 1+3\alpha \\ 1-2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}$$

(iii) für $a = -2$ ist $\mathbb{L} = \varnothing$

Aufgabe G2 (Vertauschbarkeit in Matrixprodukten)

Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

finde man eine (3×2)-Matrix B, so daß gilt $AB = E$. Berechnen Sie schließlich das Produkt BA und vergleichen Sie. Warum gilt $(BA)^2 = (BA)$?

Lösung: Wir setzen

$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

und setzen dieses B in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 2c + 3e & b + 2d + 3f \\ 6c + e & 6d + f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus lesen wir folgendes Lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 6 Variablen ab:

a	b	c	d	e	f	
1	0	2	0	3	0	1
0	1	0	2	0	3	0
0	0	6	0	1	0	0
0	0	0	6	0	1	1.

Dieses LGS ist schon in einer schönen Form, Gaußalgorithmus ist nicht mehr notwendig. Da dieses LGS unterbestimmt ist, können wir e und f frei wählen, einfachheitshalber wählen wir $e = f = 0$. Damit erhalten wir das LGS

a	b	c	d	
1	0	2	0	1
0	1	0	2	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	$\frac{1}{6}$.

Wir erhalten durch Ablesen und leichtes Auflösen von unten nach oben

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{6} \\ c &= 0 \\ b &= -\frac{1}{3} \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung für das Problem.
Das Produkt (BA) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation erhalten wir für beliebige Matrizen A, B mit $A \cdot B = E$ die Identität

$$(BA)^2 = BABA = B(AB)A = BEA = BA.$$

Dies ist kein Zufall, sondern algebraisch vorgegeben. Solche Matrizen heißen auch idempotent.

Aufgabe G3 (Struktur Linearer Gleichungssysteme)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Rang und Kern von A. Verifizieren Sie hieran die Identität

$$\dim \operatorname{kern}(A) + \operatorname{rang}(A) = 5.$$

(ii) Betrachten Sie nun das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{mit } \mathbf{b} = (0, 2, 4, 4)^T.$$

Verifizieren Sie, daß $\mathbf{x}_s = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine spezielle Lösung dieses inhomogenen Systems darstellt. Wie erhalten Sie mit ihr die vollständige Lösungsmenge des Systems?

Lösung:

(i) Mit Gaußalgorithmus formen wir das LGS um auf die Form

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & x_4 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

An dieser Stelle merken wir an, das diese Form nicht eindeutig ist. Was allerdings eindeutig ist, ist der Rang der Matrix. Diesen lesen wir ab: Es gibt 3 Pivotelemente, die nicht verschwinden, also ist $\operatorname{rang}(A) = 3$.

Wir können 2 Variablen frei wählen, wir wählen $\lambda := x_5$ und $2 \cdot \mu := x_4$. Damit erhalten wir den Lösungsraum

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir erkennen, der Kern ist zweidimensional, also $\dim(\ker(A)) = 2$. Damit stimmt in diesem Beispiel die Rangformel

$$\operatorname{rang}(A) + \dim(\ker(A)) = \dim(V) = 5,$$

wobei in unserem Beispiel $V = \mathbb{R}^5$ gilt.

(ii) Nachrechnen, daß der Vektor eine spezielle Lösung ist, ist leicht. Hier ist nun nichts mehr zu tun. Wir kennen den Kern und wir kennen eine spezielle Lösung, damit kennen wir alle Lösungen, nämlich

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hausübung

– Abgabe am 02.12.-08.12.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme) (6 Punkte)

Beantworten Sie mit Begründung die folgenden Fragen.

(i) Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m < n$ genau eine Lösung haben?

(ii) Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m > n$ unendlich viele Lösungen haben?

(iii) Kann ein homogenes lineares Gleichungssystem genau eine nichttriviale Lösung haben?

Lösung:

(i) Nein. Wenn das LGS eine Lösung hat, so in der Zeilenstufenform haben wir keine Zeilen der Form $0 = b$ mit $b \neq 0$. Da der Rang des LGS r, $r < m$ erfüllt, und wir haben $m < n$, so folgt $r < n$, also gibt es wenigstens eine breitere Stufe in der Zeilenstufenform und daher gibt es freie Variablen. Also ein solches LGS hat entweder unendlich viele oder keine Lösung.

(ii) Ja. Zum Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 = & 2 \\ 4x_1 & + & 4x_2 = & 4 \end{array}$$

(iii) Nein. Falls ein LGS eine Lösung $\mathbf{x}_0$ hat, so ist $a\mathbf{x}_0$ wieder eine Lösung für alle $a \in \mathbb{R}$ und wir können für $\mathbf{x}_0$ die nichttriviale Lösung des LGS nehmen. (Klar für die triviale Lösung gilt $a\mathbf{x}_{tr} = \mathbf{x}_{tr}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe H2 (Lineare Gleichungssysteme) (8 Punkte)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_2 + \alpha x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \beta \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

in eine Matrixgleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um und bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahren (bitte jede Elementarumformung angeben!) in Abhängigkeit von α und β:

(i) Den Rang der Matrix A und der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$.

(ii) Die Anzahl der Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mittels des Rangkriteriums.
D.h. gibt es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen?

(iii) Die Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Lösung: Das LGS besitzt als Matrixgleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ die Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahren auf die erweiterte Matrix $(A|\mathbf{b})$ liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} I \leftrightarrow II \\ \\ \\ \end{array} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array} \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2\beta \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III+2II \end{array} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-1 & -2\beta \end{array}\right).$$

Für die Parameter α und β muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, für die Werte, an denen in der Matrix A bzw. in der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$ Nullzeilen entstehen bzw. nicht entstehen. Wir erhalten als Ergebnisse für (i) und (ii):

Fall		$Rang(A)$	$Rang(A\|\mathbf{b})$	Anzahl der Lösungen
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\beta = 0$	2	2	∞
	$\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	2	3	keine
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$	$\beta \in \mathbb{R}$	3	3	genau eine

(iii) Die Lösungsmengen für die einzelnen Fälle resultieren in:

1.Fall: $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = 0$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

2.Fall: $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\mathbb{L} = \emptyset$,

3.Fall: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\beta}{2\alpha-1} \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe H3 (Rang und Kern einer Matrix) (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie den Kern von A.

(ii) Welchen Rang hat A und welche Dimension hat der Kern von A? Verifzieren Sie die Dimensionsformel.

Lösung:

(i) Mit dem Gaußschen Algorithmus bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: Ker A $= \{\lambda(1, -8, 5, 1)^T \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Wir haben Rang A $= 3$ und dim Kern A $= 1$, also stimmt in der Tat: Rang A + dim Kern A $= 4$.