Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
18.11.-24.11.10

5. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Teilräume)
Sind die folgenden Mengen Teilräume des $\mathbb{R}^2$?

$$A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cup \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$
$$B = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : 2v_1 - v_2 = -1\},$$
$$C = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : 2v_1 - v_2 = 0\}.$$

(a) Zeichnen Sie die Mengen A, B und C.

(b) Beantworten und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Antwort:

	ist Teilraum	ist nicht Teilraum
A		
B		
C		

Lösung: Menge A: Nein, da z.B. die Summe der zwei in A liegenden Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kein Element aus A ist.

Menge B: Nein (B ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$, da der Nullvektor $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Menge B nicht enthalten ist.

Menge C: Ja, denn die Menge C ist:

(i) additiv abgeschlossen:
$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$, und die Bedingung, die $\mathbf{u}$ nun erfüllen muss, um in C zu liegen, ist $2u_1 - u_2 = 0$, also $2(v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) = 2v_1 - v_2 + 2w_1 - w_2 = 0 + 0 = 0$;

(ii) skalar-multiplikativ abgeschlossen:
$\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathrm{C} \Rightarrow \lambda\mathbf{v} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$ und wiederum: $2u_1 - u_2 = 0$, also $2(\lambda v_1) - (\lambda v_2) = \lambda(2v_1 - v_2) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Aufgabe G2 (Basis, Dimension von linearen Teilräumen)

Betrachten Sie $U := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sowie $V := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

(a) Zeigen Sie: $U = V$

(b) Welche Dimension haben U bzw. V ? Geben Sie Basisvektoren an für U bzw. V.

(c) Vervollständigen Sie die Basis von U zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

(a) $\left\{ \mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (-3\mu_1 - 2\mu_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(Alternativ kann man zeigen, dass sich die einzelnen aufspannenden Vektoren aus V als Linearkombination der Vektoren aus U schreiben lassen. Daher sind alle Linearkombinationen der Vektoren aus V auch Linearkombinationen der Vektoren aus U, und somit $U = V$.)

(b) Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ist $\dim U = \dim V = 2$, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von U bzw. V.

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$, da lin. Unabhängigkeit erfüllt ist, und die Dimension stimmt.

Aufgabe G3 (Matrizenmultiplikation)

Es seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ reelle Matrizen.

(a) Welche der Produkte $AB, AC, BA, BC^T, CA, C^TA, CC, C^TC$ sind definiert? Berechnen Sie diese und geben Sie das Format des jeweiligen Produktes an.

(b) Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Aussagen:

i. Für beliebige quadratische Matrizen A und B gilt stets $AB = BA$.

ii. Ist das Produkt zweier Matrizen die Nullmatrix, so muss mindestens eine dieser Matrizen die Nullmatrix sein.

Lösung:

(a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $AC = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 13 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} & 3 \\ 2 & -5 & -6 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$C^TA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 10 & 15 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $C^TC = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

(b) i. Nein, siehe z.B. für obige Matrizen A und B.

ii. Nein, siehe z.B. für obiges Produkt $A \cdot B$.

Hausübung

– Abgabe am 25.11.-01.12.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Lineare Teilräume) (7 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen T_1, T_2, T_3, ob sie ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ist? Begründen Sie Ihre Antworten. Beschreiben Sie jede Menge geometrisch.

(a) $T_1 := \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 5\}$

(b) $T_2 := \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

(c) $T_3 := \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_1 - x_2\}$

Lösung:

(a) T_1 ist kein Teilraum, da $\mathbf{0} \notin T_1$. T_1 ist eine Ebene.

(b) $T_2 := \{ (x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
T_2 ist kein Teilraum, da $\mathbf{0} \notin T_2$. T_2 ist die Kugeloberfläche mit dem Radius 1 in $\mathbb{R}^3$.

(c) $T_3 := \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 2x_1 - x_2\}$
Wir wollen zeigen, dass T_3 ein Teilraum ist.
Seien $(x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T \in T_3$. Es ist zu zeigen: $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)^T \in T_3$. Es gelten die Gleichungen

$$x_3 = 2x_1 - x_2 \qquad y_3 = 2y_1 - y_2.$$

Die Summe dieser Gleichungen ist

$$x_3 + y_3 = 2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2 = 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)$$

und damit ist $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)^T \in T_3$.
Nun seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und wiederum $(x_1, x_2, x_3) \in T_3$. Es ist zu zeigen: $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in T_3$. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung $x_3 = 2x_1 - x_2$ mit λ und ordnen das Ergebnis neu:

$$\lambda x_3 = \lambda(2x_1 - x_2) = 2(\lambda x_1) - (\lambda x_2).$$

Es folgt, $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T \in T_3$ und somit ist T_3 ein Teilraum. T_3 ist die Ebene $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Aufgabe H2 (Basis, Dimension von linearen Teilräumen) (5 Punkte)

Die Menge $U := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie eine Basis von U an.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

(c) Vervollständigen Sie die Basis von U aus (a) zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (diese beiden Vektoren sind linear unabhängig)

(b) $\dim U = 2$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe H3 (Matrizenmultiplikation) (8 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Welche der Produkte A^2, AB, AD, BD, DB, CD, DC^T sind definiert? Berechnen Sie diese und geben Sie das Format des jeweiligen Produktes an.

(b) Die Matrixprodukte AD, BD, CD erhält man als eine der folgenden elementaren Umformungen von D. Ordnen Sie jeweils die Produkte AD, BD, CD zu:

i. *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeilein der Matrix D,*

ii. *Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl,*

iii. *Vertauschen von Zeilen.*

Lösung: (a) $AD, BD, CD \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$, DB und DC^T n.d., $A^2, AB \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

(c) $A^2 = E$, $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AD = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $BD = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(d) AD — iii., BD — i., CD — ii.