Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
11.11.-17.11.10

4. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Geraden im $\mathbb{R}^3$)

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in Parameterform, die durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft. Überprüfen Sie, ob der Punkt $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegt. Berechnen Sie den Abstand der Geraden vom Ursprung.

Lösung: Als Ortsvektor (Aufpunkt) können wir $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nehmen. Als Richtungsvektor wählen wir

$$\mathbf{a} = P - Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

In Parameterdarstellung hat die Gerade die Form

$$g: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit reellem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Wie man leicht nachrechnet, liegt der Punkt R auf der Geraden, da $R = Q + 3\mathbf{a}$ gilt.
Nach dem Skript gilt folgende Formel für den Abstand zum Ursprung

$$d = \left(|Q|^2 - \frac{\langle Q, \mathbf{a} \rangle^2}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{7}{5}}.$$

Aufgabe G2 (Senkrechte auf einer Ebene)

(i) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene, die durch den von P bestimmten Punkt geht und senkrecht auf der Geraden g steht. Hierbei ist:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$g: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(ii) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen.

Lösung:

(i) Als Ortsvektor können wir einfach P nehmen. Als Normalenvektor benutzen wir den Richtungsvektor der Geraden, d.h. $\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Normalenform der Ebene lautet: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = P \cdot \mathbf{n}$. Dies ergibt $x_2 = 3$.

(ii) Setze die Ebenengleichung in die Geradengleichung ein. Dies ergibt zwangsläufig $x_2 = \lambda \stackrel{!}{=} 3$. Und damit ergibt sich für den Schnittpunkt

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Schnitt Ebene mit Geradenschar)

Gegeben sei die Ebene

$$E: \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9.$$

(i) Bestimmen Sie die Hessesche Normalenform der Ebene E und deren Abstand zum Ursprung.

(ii) Geben Sie eine Parameterdarstellung von E an.

(iii) Betrachten Sie folgende Schar von Geraden, gegeben durch

$$g_t: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei t ein flexibel wählbarer Parameter aus $\mathbb{R}$ ist.

Wie muss der Parameter t gewählt sein, damit es einen Schnittpunkt der Ebene mit einer solchen Geraden gibt? Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist g_t parallel zu E? Wie groß ist in diesen Fällen der Abstand von g_t zu E? Geben Sie in den Fällen der Nichtparallelität den gemeinsamen Schnittpunkt in Abhängigkeit vom Parameter t an.

Lösung:

(i) Wir lesen als Normalenvektor ab $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Da $|\mathbf{n}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ gilt, können wir als Einheitsnormalenvektor den folgenden Vektor nehmen:

$$\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Normalenform der Ebene E lautet somit

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 3.$$

Dementsprechend ist der Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung gleich 3 Längeneinheiten.

(ii) Nehme als Ortsvektor einen beliebigen Punkt von E, z.B. setze $x_1 = x_2 = 1$ und löse $1 * 1 + 2 * 1 - 2x_3 = 9$; dies ergibt $x_3 = -3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ist dann ein Punkt von E.

Wir bestimmen nun zwei weitere Punkte Q und R von E. Setzen wir $x_2 = x_3 = 0$ dann muss $x_3 = 9$ sein, um auf der Ebenen zu liegen. Mit

$$Q = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben wir einen weiteren Punkt von E. Setzen wir ferner $x_3 = 3, x_2 = 0$ dann haben wir als Bedingung $x_1 = 9 + 6 = 15$ um einen Punkt aus E zu bilden. Für R nehmen wir dementsprechend

$$R = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Als ersten Richtungsvektor für die Ebene nehmen wir jetzt:

$$\mathbf{a} := R - Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Als zweiten Richtungsvektor nehmen wir

$$\mathbf{b} := Q - P = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Setze "g in E" ein: Dies ergibt: $1 + \lambda t + 2 - 2\lambda = 9$. Dies ist äquivalent mit der Bedingung

$$(*) \qquad \lambda(t-2) = 6.$$

Im Fall $t = 2$ ist (*) äquivalent mit $0 = 6$. Dies ist nie erfüllt. Für $t = 2$ hat $g_{t=2}$ keinen einzigen gemeinsamen Schnittpunkt mit E und ist somit parallel zu E. Daher hat auch jeder Punkt dieser Geraden denselben minimalen Abstand zur Ebene. Das Abstandsproblem ist daher reduziert auf die Berechnung des Abstandes der Ebene E zum Aufpunkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geraden. Aus der Formel im Skript (Seite 24) ergibt sich dafür:

$$d = |\frac{1}{3} * 1 + \frac{2}{3} * 1 - \frac{2}{3} * 0 - 3| = 2.$$

Im allen Fällen $t \neq 2$ können wir die Gleichung (*) eindeutig nach λ auflösen, und es ergibt sich dann $\lambda = \frac{6}{t-2}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ erhalten wir einen eindeutig bestimmten gemeinsamen Schnittpunkt der Ebene E mit solch einer Geraden g_t. Dieser ist gegeben durch:

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{t-2} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7t-2}{t-2} \\ 1 \\ \frac{6}{t-2} \end{pmatrix}.$$

Hausübung

– Abgabe am 18.11.-24.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$) (5 Punkte)

Gegeben seien die Geraden

$$g_1 : \quad \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : x_1 - x_2 = 1.$$

(i) Geben Sie von beiden Geraden die Hessesche Normalenform an.

(ii Wie lautet der gemeinsame Schnittpunkt beider Geraden?

(iii) Berechnen Sie den Schnittwinkel beider Geraden.

Lösung:

(i) Ein Normalenvektor von g ist $\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Da $|\mathbf{n}| = \sqrt{5}$, dient $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ als Einheitsnormalenvektor von g_1. Die Hessesche Normalenform lautet also: $\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 = 0$.

Von der zweiten Gerade lesen wir als Normalenvektor ab $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Da $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ gilt, dient $\mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ als Einheitsnormalenvektor von g_2. Die Hessesche Normalenform lautet: $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) Setze "Gleichung für g_1 in Gleichung g_2 ein". Das liefert $\lambda - 2\lambda = 1$ also $\lambda = -1$. Als Schnittpunkt bekommen wir

$$\mathbf{x}_s = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Probe: $\mathbf{x}_s \in g_1$? Ja, nehme $\lambda = -1$. $\mathbf{x}_s \in g_2$? Ja, denn $(-1) - (-2) = 1 \iff -1 + 2 = 1$ ist eine wahre Aussage.

(iii) Für den Schnittwinkel gilt: $\cos(\varphi) = \frac{\langle \mathbf{n},\mathbf{m} \rangle}{|\mathbf{n}||\mathbf{m}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Aufgabe H2 (Ebene im $\mathbb{R}^3$) (7 Punkte)

(i) Stellen Sie die Gleichung der Ebene E auf, die durch die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verläuft.

(ii) Bestimmen Sie die Hessesche Normalenform dieser Ebene und geben Sie den Abstand von E zum Koordinatenursprung an.

(iii) Verifizieren Sie zunächst, dass der Punkt $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Ebene liegt. Wie weit ist er vom Ursprung entfernt? Stellen Sie die Gleichung der Geraden g auf, die die Ebene im Punkt Z senkrecht durchstößt.

(iv) Geben Sie alle Geraden an, die im Abstand 1 parallel zur Ebene E verlaufen. Benutzen Sie dabei allgemeine Parameter.

Lösung:

(i) Als Ortsvektor (Aufpunkt) können wir $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nehmen.

Als ersten Richtungsvektor nehmen wir $\mathbf{a} := P - Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Als zweiten Richtungvektor wählen wir $\mathbf{b} := R - Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit können wir die Ebene E in folgender Form beschreiben:

$$E: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit reellen Parametern α und β.

(ii) Als Normalenvektor konstruieren wir $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $|\mathbf{n}| = 1$ gilt, dient dieser Vektor bereits als Normaleneinheitsvektor $\mathbf{e}_n$.

Die Hessesche Normalenform lautet $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_n = P \cdot \mathbf{e}_n \iff x_1 = 1$.

Wir lesen ab (rechte Seite der Hesseschen Normalenform), dass der Abstand von E zum Ursprung $d = 1$ beträgt.

(iii) Wie man leicht nachrechnen kann, kann man den Punkt Z darstellen in der Form $Z = P + 3Q + R$, somit liegt er auf der Ebene E. Der Abstand vom Punkt Z zum Ursprung ist einfach $|Z| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{27}$.

Als Ortsvektor der gesuchten Geraden g können wir somit Z nehmen. Als Richtungsvektor dient ein Normalenvektor der Ebene, z.B. $\mathbf{n}$. Somit lautet die Geradengleichung der gesuchten Gerade g:

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

(iv) Die Geraden, die im Abstand 1 parallel zur Ebene E verlaufen, können in der Form

$$G: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ q \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

mit beliebigen aber festen Parametern $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ und Geradenparameter $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie

$$H: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ p' \\ q' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

mit beliebigen aber festen Parametern $c, d, p', q' \in \mathbb{R}$ und Geradenparameter $\mu \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Aufgabe H3 (Gegenseitige Lage einer Ebene mit zwei Geraden) (8 Punkte)

Gegeben sei folgende Ebene in der Parameterdarstellung

$$E: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Geraden g

$$g: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und h

$$h: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage und den Abstand der Ebene zu beiden Geraden. Im Falle, dass sich die Ebene mit einer Geraden schneidet,geben Sie den Schnittpunkt an.

Lösung: Um nachzuchecken, ob E und g einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, müssen wir Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ finden, so dass folgende Gleichheit gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent mit folgendem Gleichungssystem

$$a \qquad - c = 3 \tag{1}$$
$$a + b \qquad = 1 \tag{2}$$
$$-b - 2c = -1. \tag{3}$$

Aus Gl. (1) ergibt sich

$$a = 3 + c. \tag{4}$$

Wenn wir dies in Gl. (2) substituieren ergibt sich $3 + c + b = 1$, also

$$b = -2 - c. \tag{5}$$

Dies setzen wir nun in Gl. (3) ein und erhalten $2 + c - 2c = -1$ also $c = 3$. Wenn wir das Ergebnis in Gl. (5) einsetzen bekommen wir $b = -2 - 3 = -5$. Aus Gl. (4) erhalten wir schließlich $a = 3 + 3 = 6$.

Um den Schnittpunkt von E mit g zu berechnen, setzen wir in der Geradengleichung von g den Parameter c fest auf $c = 3$. Dies ergibt

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 1-0 \\ -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Um die gegenseitige Lage von E und h zu bestimmen geht man entweder analog vor, wie soeben, oder man erkennt direkt durch scharfes Hinsehen, dass wir den Richtungsvektor der Geraden als Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene schreiben kann, nämlich als

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(Genau das bekommt man auch, wenn man das Gleichungssystem löst!) Somit verläuft die Ebene E parallel zu h oder evtl. liegt h sogar in der Ebene E.

Dazu berechnen wir den minimalen Abstand der Ebene mit der Geraden. Da die Gerade auf jeden Fall parallel zur Ebene verläuft, ist der minimale Abstand zwischen der Ebene und der Geraden h identisch mit dem Abstand des Aufpunktes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden mit der Ebene. Ist dieser Abstand gleich Null, dann liegt die Gerade in der Ebene; andernfalls verläuft sie parallel zu ihr in diesem Abstand. Um den Abstand der Ebene zum Aufpunkt der Geraden zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Hessesche Normalenform der Ebene. Über das Vektorprodukt berechnen wir aus den beiden Richtungsvektoren einen Normalenvektor; wir bekommen

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ist, lautet die Hessesche Normalenform der Ebene wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = 2\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Hier habe ich die Gleichung noch mit -1 multipliziert, um rechts eine positive Zahl zu erhalten). Für den Abstand der Ebene zum Aufpunkt der Geraden ergibt sich also aus der Abstandsformel im Skript Seite 24, dass

$$d = |\frac{1}{\sqrt{3}} * 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} * 0 - 2 * \frac{1}{\sqrt{3}} - 2\frac{1}{\sqrt{3}}| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Damit wissen wir nun auch dass die Gerade h parallel zur Ebenen E verläuft.