Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
04.11.-10.11.10

3. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rechnen mit Vektoren)

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Zielpunkt, der sich ausgehend vom Ursprung durch nachfolgende Wegbeschreibung ergibt und zeichnen Sie den Weg auf:

(a) Laufen Sie zunächst den Vektor $\mathbf{v}_1$ ab.

(b) Dann zweimal in Richtung von $\mathbf{v}_2$.

(c) Bilden Sie $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ und gehen in entgegengesetzter Richtung die halbe Strecke.

(d) Laufen Sie schliesslich entlang des Vektors $\mathbf{v}_4$ die $2,5$-fache Strecke zum Zielpunkt.

Lösung: Bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehts los. (a) $\to \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $\to \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\to \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1 \end{pmatrix}$, (d) $\to \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$

Die zurückgelegte Strecke ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + 2.5\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Linearkombination von Vektoren)

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Welcher der Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$?

Lösung: Der Vektor $\mathbf{b}$ ist Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ nicht.

$\mathbf{a}$: Wir suchen λ_1 und λ_2, so dass $\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} = \mathbf{a}$ gilt. Das führt uns auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Addieren der ersten zur zweiten Zeile ergibt $2\lambda_2 = 0$ also $\lambda_2 = 0$. Einsetzen in die erste bringt uns $\lambda_1 = 0$. Allerdings erhalten wir jetzt in der dritten Zeile des Gleichungssystems einen Widerspruch: $4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 + 0 = 0 \neq 1$! Also ist das System nicht lösbar, und $\mathbf{a}$ ist keine Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

$\mathbf{b}$: Wir suchen λ_1 und λ_2, so dass $\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} = \mathbf{b}$ gilt. Das führt uns auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= -1 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 12 \end{aligned}$$

Addieren der ersten zur zweiten Zeile ergibt $2\lambda_2 = 2$ also $\lambda_2 = 1$. Einsetzen in die erste bringt uns $\lambda_1 = 2$. Die dritte Zeile des GS ist auch erfüllt: $4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 8 - 2 = 6$. Also sind die beiden λ's die Lösung des Systems. Und $\mathbf{b}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

$\mathbf{c}$: Wir suchen λ_1 und λ_2, so dass $\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} = \mathbf{c}$ gilt. Das führt uns auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $\lambda_2 = 2\lambda_1$. Einsetzen in die erste führt zu $\lambda_1 = \frac{1}{3}$.
Allerdings erhalten wir jetzt in der zweiten Zeile des Gleichungssystems einen Widerspruch: $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq 3$. Also ist das System nicht lösbar, und $\mathbf{c}$ ist keine Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

Aufgabe G3 (Vektorprodukt, Skalarprodukt)
Im folgenden sei ein kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ das Bezugssystem.

(a) Sei im $\mathbb{R}^3$ das Dreieck ABC gegeben mit $A = (3, 0, -1)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (5, -6, 1)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

(b) Ein Objekt, das sich nur entlang der x-Achse bewegen kann, wird mit einer konstanten Kraft von $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ N gezogen. Wie groß ist die Arbeit, die verrichtet wurde, wenn das Objekt 5m in positiver x-Richtung bewegt wurde?
Hinweis. Es gilt das Gesetz $\mathbf{Arbeit} = \langle \mathbf{Kraft}, \mathbf{Weg} \rangle$.

Lösung:

(a) Sei im $\mathbb{R}^3$ das Dreieck ABC gegeben mit $A = (3, 0, -1)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (5, -6, 1)$.
Flächeninhalt: Bilde Kreuzprodukt der Richtungsvektoren.

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt ist Hälfte des Betrages des Kreuzproduktes:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{216}}{2} = 3\sqrt{6}.$$

(b) $W = \langle \mathbf{F}, \mathbf{s} \rangle$, wobei $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$. Damit ist $W = 25Nm$.

Hausübung

– Abgabe am 11.11.-17.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Rechnen mit Vektoren, Lineare Unabhängigkeit) (7 Punkte)

Gegeben seien für $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, wenn möglich, folgende Ausdrücke und veranschaulichen Sie diese graphisch:

$$i)\ \mathbf{w} + \mathbf{x} - \mathbf{y}, \qquad ii)\ 2\mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{y} - 3\mathbf{z}, \qquad iii)\ \mathbf{wy} + \mathbf{wz}, \qquad iv)\ w_1\mathbf{y} + w_2\mathbf{z}$$

(b) Sind die Vektoren linear unabhängig?

(c) Stellen Sie $\mathbf{z}$ als Linearkombination von $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ dar. Ist dies eindeutig?

(d) Sind die Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{x}$ linear unabhängig? Gilt das für beliebige $a \in \mathbb{R}$?

Lösung:

(a)

$$
\begin{aligned}
&i) && \mathbf{w} + \mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1 \end{pmatrix}, \\
&ii) && 2\mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{y} - 3\mathbf{z} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \\
&iii) && \mathbf{wy} + \mathbf{wz} = \text{...Das geht natürlich nicht,} \\
&iv) && w_1\mathbf{y} + w_2\mathbf{z} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) Natürlich sind die Vektoren nicht linear unabhängig, da es alleine schon vier Vektoren sind und wir nur im $\mathbb{R}^2$ sind. Exemplarisch kann man das mal nachrechenen.

(c) Zum Beispiel ...

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{oder} \\
&= (1-a)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} + (a - \frac{1}{2})\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nein, die Darstellung ist nicht eindeutig, da die Vektoren $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ immernoch linear abhängig sind.

(d) Die Vektoren sind für $a \neq -\frac{1}{2}$ linear unabhängig. Für $a = -\frac{1}{2}$ gilt $\mathbf{w} + 2\mathbf{x} = 0$ und somit sind sie in diesem Fall linear abhängig.

Aufgabe H2 (Skalarprodukt) (7 Punkte)

Gegeben sind die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(a) Berechnen Sie die alle Skalarprodukte $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle$.

(b) Berechnen Sie die Normen der drei Vektoren.

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

(d) Überprüfen Sie ihre Ergebnisse, indem Sie die drei Vektoren zeichnen und die Längen und Winkel messen oder schätzen.

Lösung:

(a) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = 2$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -3$,$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 7$ $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = -12$,$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = 9$, $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle = 25$

(b) $\|v_1\| = \sqrt{2}$, $\|v_1\| = 3$, $\|v_1\| = 5$

(c) $\sphericalangle \ (v_1, v_2) = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}}\right) = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{18}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} = 135°$
(analog ist $\sphericalangle \ (v_2, v_1) = 245°$ möglich)

(d) Skizze

Aufgabe H3 (Spatprodukt) (6 Punkte)

Spannen folgende Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ein Parallelotop auf? Falls ja, bestimmen Sie das Volumen. Falls nein, was bedeutet das geometrisch für $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$?

(a) $\mathbf{a} = (1, -2, 1)^\top$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)^\top$, $\mathbf{c} = (-2, 1, 3)^\top$

(b) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^\top$, $\mathbf{b} = (1, -1, -1)^\top$, $\mathbf{c} = (3, 0, -1)^\top$

Lösung:

(a) $\mathbf{a} = (1, -2, 1)^\top$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)^\top$, $\mathbf{c} = (-2, 1, 3)^\top$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 8. \end{aligned}$$

Das Volumen ist ungleich Null, damit spannen die drei Vektoren ein Parallelotop auf.

(b) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^\top$, $\mathbf{b} = (1, -1, -1)^\top$, $\mathbf{c} = (3, 0, -1)^\top$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Das Volumen ist Null. Das ist gleichbedeutend damit, dass die drei Vektoren schon in einer Ebene liegen.