Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
28.10.-3.11.10

2. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Beweistechniken)

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Geben Sie zwei Beweise (mit und ohne vollständige Induktion) für diese Tatsache an.

Lösung:

- (Induktionsbeweis)
  IV: Betrachte $n = 1$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1}$. Damit ist die Aussage wahr für $n = 1$.
  IS: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (IV).
  Behauptung:
  $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$
  Beweis:
  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
  &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
  &= \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)} \\
  &= \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)} \\
  &= \frac{n+1}{n+2} \\
  &= \frac{n+1}{(n+1)+1}.
  \end{aligned}$$

- (Direkter Beweis)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} + \frac{k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k(k+1)} \\
&\overset{(k\neq 0)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Konjugiert komplexe Zahlen)
Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) heißt $\overline{z} := a - ib$ die zu z komplex konjugierte Zahl.

a) Skizzieren Sie die Zahlen z und $\overline{z}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Berechnen Sie $\overline{(\overline{z})}$, $|\overline{z}|$, $z + \overline{z}$ sowie $z \cdot \overline{z}$ und zeigen Sie, dass $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$ gilt, sofern $z \neq 0$ erfüllt ist.

c) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.

Lösung:

a) Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ ensteht durch Spiegelung der ursprünglichen komplexen Zahl z an der reellen Achse.

b) Es gilt: $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
Ferner gilt $|\overline{z}| = |a - ib| = (a^2 + (-b)^2)^{1/2} = (a^2 + b^2)^{1/2} = |z|$.
Weiterhin haben wir $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z)$ und $z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Sei schließlich $z \neq 0$. Dann ist auch $|z| \neq 0$. Nun gilt einerseits, dass $z \cdot \overline{z}/|z|^2 = |z|^2/|z|^2 = 1$, als auch andererseits, dass $\overline{z}/|z|^2 \cdot z = |z|^2/|z|^2 = 1$. Also ist $\overline{z}/|z|^2$ zugleich das Linksverse als auch das Rechtsinverse von der Zahl z bzgl. der Multiplikation.

c) Seien $z = a+ib$ und $w = x+iy$ beliebige komplexe Zahlen. Dann gilt: $\overline{z + w} = \overline{a + ib + x + iy} = \overline{a + x + i(b + y)} = a + x - i(b + y) = (a - ib) + (x - iy) = \overline{z} + \overline{w}$. Außerdem gilt: $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + ib)(x + iy)} = \overline{(ax - by + i(bx + ay))} = (ax - by - i(bx + ay)) = (a - ib)(x - iy) = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
Unter Verwendung von Teil b) haben wir: $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$. Daher gilt $(\overline{z})^{-1} = \overline{\overline{z}}/|z|^2 = z/|z|^2$.

Aufgabe G3 (Rechnen mit komplexen Zahlen)
Gegeben seien folgende komplexe Zahlen

$$z_1 := (3 + 4i), \qquad z_2 := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

a) Bestimmen Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag der komplexen Zahlen z_1 und z_2.

b) Berechnen Sie: $z_1^2, |z_1^2|, z_2^2, \overline{z_1 \cdot z_2}, \overline{z_1 + z_2},\ \overline{z_1 - z_2},\ z_1^{-1}$ und z_2^{-1} und geben Sie diese Zahlen in der Standardform $a + ib$ mit den reellen Komponenten $a, b \in \mathbb{R}$ an.

c) Skizzieren Sie diese Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene. Fällt Ihnen etwas auf?

Lösung:

a) Wir lesen ab: $Re(z_1) = 3, Im(z_1) = 4$ und $Re(z_2) = \frac{1}{2}, Im(z_2) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist gegeben durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Somit erhalten wir: $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ und $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

b) Es gilt $z_1^2 = (3 + 4i)(3 + 4i) = 9 - 16 + 24i = -7 + 24i$. Wir erhalten $|z_1^2| = \sqrt{49 + 576} = 25 = |z_1|^2$. Weiterhin gilt: $z_2^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})(\frac{1}{2} + (\frac{1}{2}i\sqrt{3}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.
Wir berechnen zunächst: $(z_1 \cdot z_2) = (3 + 4i)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = (\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}) + i(2 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$. Unter Verwendung von Aufgabenteil c) der vorherigen Aufgabe können wir jetzt folgern, dass gilt: $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = (3 + 4i)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = (\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}) - i(2 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$. Ebenfalls folgt aus $(z_1 + z_2) = \frac{7}{2} + i(4 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ und $(z_1 - z_2) = \frac{5}{2} + i(4 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$, dass gilt $\overline{z_1 + z_2} = \frac{7}{2} - i((4 + \frac{1}{2}\sqrt{3}))$, sowie ferner auch $\overline{z_1 - z_2} = \frac{5}{2} - i(4 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Ebenfalls erhalten wir unter Verwendung von Aufgabenteil c) der vorherigen Aufgabe sofort die Aussagen: $z_1^{-1} = \overline{z_1}/|z_1|^2 = (3 - 4i)/25 = \frac{3}{25} - i\frac{4}{25}$ sowie $z_2^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, da $|z_2|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ gilt.

c) Es fällt auf, dass sich bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen die Beträge multiplizieren während sich die Winkel aufaddieren.

Hausübung

– Abgabe am 04.11.-10.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Mengen von komplexen Zahlen) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = |z + 2|\}$$

und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung: Wir verwenden die Notation $z = x + iy$ mit reellen Komponenten $x, y \in \mathbb{R}$. Die Bedingung $|z + i| = |z + 2|$ ist äquivalent mit $|x + i(y + 1)|^2 = |(x + 2) + iy|^2 \iff x^2 + (y + 1)^2 = (x + 2)^2 + y^2 \iff y = 2x + \frac{3}{2}$. Die gesuchte Punktmenge ist also eine Grade in der komplexen Ebene, die die Steigung 2 besitzt und die imaginäre Achse im Punkt $\frac{3}{2}i$ schneidet.

Aufgabe H2 (Rechnen mit komplexen Zahlen) (8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{1 - i}{1 + i}, \quad z_2 := (6 + 8i)^2.$$

a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag dieser komplexen Zahlen.

b) Berechnen Sie die multiplikativ inversen Elemente z_1^{-1} und z_2^{-1} und geben Sie diese in der Form $(a + ib)$ an.

Lösung:

a) Es gilt $z_1 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i^2-2i}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$. Also ist $Re(z_1) = 0, Im(z_1) = -1$ und $|z_1| = 1$.
Es gilt: $(6+8i)^2 = (6+8i)(6+8i) = 36-64+96i = -28+96i$. Also gilt: $Re(z_2) = -28$ und $Im(z_2) = 96$. Ebenfalls gilt: $|(6+8i)^2| = |6+8i|^2 = 36+64 = 100$.

b) Es gilt: $z_1^{-1} = \frac{\overline{-i}}{1} = i$. Ebenso haben wir sofort: $(-28+96i)^{-1} = \frac{-28-96i}{100^2}$.

Aufgabe H3 (vollständige Induktion) (6 Punkte)

Im folgenden seien $z_1, z_2, \cdots, z_n$ beliebige komplexe Zahlen. Zeigen Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass gilt:

a) $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \cdots \overline{z_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ und geben Sie den exakten Wert der Summe $(1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3)$ an.

Lösung:

a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Für $n = 2$ ist die Aussage in der Gruppenübung gezeigt worden.
Induktionsvoraussetzung: Gelte die Aussage für ein $n \geq 1$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Da $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$ für alle komplexen Zahlen gilt, gilt auch

$$\overline{z_1 \cdots z_n z_{n+1}} = \overline{z_1 \cdots z_n} \cdot \overline{z_{n+1}} \overset{I.V.}{=} \overline{z_1} \cdot \cdots \cdot \overline{z_n} \cdot \overline{z_{n+1}}.$$

Somit gilt die Aussage also auch automatisch für $n+1$ und folglich für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt offensichtlich die Gleichheit $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$.

Induktionsvoraussetzung: Gelte die Aussage für ein $n \geq 1$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir betrachten:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2,
\end{aligned}$$

womit die Aussage auch für $n+1$ und damit für alle natürlichen Zahlen gilt.
Schließlich erhalten wir mit dieser Formel den Wert $1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3 = (100 * 101)^2/4 = 25502500$.