Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
21.10.-27.10.10

1. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Vergleich von Mengen)
Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
X_1 &:= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist eine gerade Zahl}\} \\
X_2 &:= \{y \in \mathbb{Z} \mid \text{es existiert ein } z \in \mathbb{Z} \text{ mit } y^2 + z^2 \leq 2\} \\
X_3 &:= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist teilbar durch } 6\} \\
X_4 &:= \{y \in \mathbb{Z} \mid (y^4 + y^2 - 2)(y^2 - 2y) = 0\} \\
X_5 &:= \{y \in \mathbb{Z} \mid 3y^2 \text{ ist teilbar durch } 4\}
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $X_1 \cap X_2$, $X_3 \cup X_5$ und $X_2 \times X_4$.

(b) Prüfen Sie, für welche $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i \neq j$, die Relation $X_i \subseteq X_j$ gilt. Welche Mengen sind gleich?

Hinweis: Für alle Mengen können die Elemente explizit aufgelistet werden.
Z.B. $X_1 = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$.

Lösung: Für X_2 ist es einfach einzusehen, dass $X_2 = \{-1, 0, 1\}$ gilt.
$X_3 = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, \ldots\}$
$y \in X_4 \Leftrightarrow y \in \mathbb{Z}$ und $(y(y-2) = 0$ oder $y^4 + y^2 - 2 = 0)$
$y(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ oder $y = 2$
$y^4 + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ oder $y = -1$
Daher gilt $X_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$.
X_5 besteht nur aus geraden Zahlen, da das Quadrat einer ungeraden Zahl und das Produkt zweier ungerade Zahlen wieder ungerade ist. Wenn aber y gerade ist, dann ist auch y^2 gerade und daher $3y^2$ auch teilbar durch 4. Daher gilt $X_5 = X_1$.

(a) $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, $\quad X_3 \cup X_5 = X_1$,
$X_2 \times X_4 = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,2), (0,-1), (0,0), (0,1), (0,2), (1,-1), (1,0), (1,1), (1,2)\}$

(b) Wenn wir die Elemente der Mengen vergleichen können wir das Folgende schließen:
$X_2 \subseteq X_4$, $\quad X_3 \subseteq X_1$, $\quad X_1 = X_5$.

Aufgabe G2 (Beträge und Ungleichungen)

1. Aus der Definition des Betrages ergibt sich sofort für $a \in \mathbb{R}$: $|a| \geq 0$ und $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.
   Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $|ab| = |a|\,|b|$ (mittels Fallunterscheidung),

(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung: "$\triangle$-Ungl."),

(iii) $|\,|a| - |b|\,| \leq |a-b|$.

2. Beschreiben Sie die Ungleichungen

$$\text{(i)} \quad |x-1| \geq 5 \qquad \text{(ii)} \quad |x-1| \leq 5$$

jeweils möglichst einfach durch mehrere Ungleichungen mit logischen Verknüpfungen ohne Verwendung des Betrages.
Bestimmen Sie die Lösungsmengen und skizzieren Sie diese auf dem Zahlenstrahl.

3. Skizzieren Sie den Bereich der (x, y)–Ebene mit $|x| \geq |y|$.

Lösung:

1. (i) 1. Fall: Seien $a, b \geq 0$. Dann folgt sofort die Behauptung.
   2. Fall: Seien $a \geq 0$ und $b \leq 0$. Dann gilt $|ab| = -ab = a(-b) = |a|\,|b|$.
   3. Fall: Seien $a, b \leq 0$. Dann gilt $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a|\,|b|$.
   4. Fall: Seien $a \leq 0$ und $b \geq 0$. Dann gilt $|ab| = -ab = (-a)b = |a|\,|b|$.

   (ii) Aus der Definition des Betrages folgt $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$, analog $\pm b \leq |b|$.
   Sei $(a+b) \geq 0$, dann folgt also $|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$.
   Sei nun also $(a+b) < 0$, dann gilt $|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$.

   (iii) Aus (ii) folgt $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ und daher $|a| - |b| \leq |a-b|$. Analog folgt $|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a|$ und somit $|b| - |a| \leq |b-a|$, also $-(|a| - |b|) \leq |a-b|$.
   Insgesamt gilt also $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

2. (i) Für den Fall $|x-1| \geq 0$ ergibt sich nach Definition des Betrages $x - 1 \geq 5$, und für den Fall $|x-1| \leq 0$ ergibt sich $-(x-1) \geq 5$. Die Ungleichung lässt sich also wie folgt äquivalent beschreiben:

$$\begin{aligned} |x-1| \geq 5 \quad &\Leftrightarrow \quad x-1 \geq 5 \quad \vee \quad 1-x \geq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 6 \qquad\;\; \vee \quad x \leq -4\,. \end{aligned}$$

   (ii) Für den Fall $|x-1| \geq 0$ ergibt sich nach Definition des Betrages $x - 1 \leq 5$, und für den Fall $|x-1| \leq 0$ ergibt sich $-(x-1) \leq 5$. Die Ungleichung lässt sich also wie folgt äquivalent beschreiben:

$$\begin{aligned} |x-1| \leq 5 \quad &\Leftrightarrow \quad x-1 \leq 5 \quad \wedge \quad x-1 \geq -5 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq 6 \qquad\;\; \wedge \quad x \geq -4\,. \end{aligned}$$

   Die Lösungsmenge von (i) ist $L_1 =]-\infty, -4] \cup [6, \infty[$. Die Lösungsmenge von (ii) ist $L_2 = [-4, 6]$.

3. Es sind 4 Fälle zu untersuchen:
   $x \geq 0$ und $y \geq 0$, daraus folgt $y \leq x$ im ersten Quadranten.
   $x \leq 0$ und $y \geq 0$, daraus folgt $y \leq -x$ im zweiten Quadranten.
   $x \leq 0$ und $y \leq 0$, daraus folgt $y \geq x$ im dritten Quadranten.
   $x \geq 0$ und $y \leq 0$, daraus folgt $y \geq -x$ im vierten Quadranten.

Aufgabe G3 (Intervallschachtelung)
Approximieren Sie mittels Intervallschachtelung die reelle Zahl $\sqrt{5}$ bis zur fünften Nachkommastelle genau.

Lösung: Eine erste untere Grenze ist 2 und eine erste obere Grenze ist 3, da $2^2 = 4 < 5 < 9 = 3^2$ ist. Also ist $I_0 = [2\,,\,3]$. Unterteilung von I_0 in zehn gleich große Teilintervalle ($[2.0\,,\,2.1], [2.1\,,\,2.2], \ldots, [2.9\,,\,3.0]$) ergibt $\sqrt{5} \in [2.2\,,\,2.3] := I_1$, da $2.2^2 = 4.84 < 5 < 5.29 = 2.3^2$ ist. Weitere Intervalle, die $\sqrt{5}$ enthalten und durch wiederholtes Unterteilen bestimmt werden können, sind $I_2 = [2.23\,,\,2.24]$, $I_3 = [2.236\,,\,2.237]$, $I_4 = [2.2360\,,\,2.2361]$, $I_5 = [2.23606\,,\,2.23607]$ und $I_6 = [2.236067\,,\,2.236068]$. Somit ist $\sqrt{5} \approx 2.23607$.

Hausübung

– Abgabe am 28.10.-03.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Mengen) (6 Punkte)

Sei $A = \{3, 2, 1\}$, $B = \{42\}$ und $C = \{1, 3\}$.
Gib die Mengen $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $A \times C$, $A \times (B \cap C)$ und $C^3 = C \times C \times C$ an. Gilt $B \times C = C \times B$?

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{1, 2, 3, 42\}, \\
A \cup C &= \{1, 2, 3\} = A, \\
A \cap B &= \emptyset, \\
A \cap C &= \{1, 3\}, \\
A \setminus B &= \{1, 2, 3\} = A, \\
A \setminus C &= \{2\}, \\
A \times C &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}, \\
A \times (B \cap C) &= A \times \emptyset = \emptyset, \\
C^3 &= C \times C \times C \\
&= \{(1, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 3)\}, \\
B \times C &= \{(42, 1), (42, 3)\} \neq \{(1, 42), (3, 42)\} = C \times B.
\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Zahlenbereiche und Ungleichungen) (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ und stellen Sie diese graphisch auf der Zahlengeraden dar:

(a) $x^2 + 1 > 5x + 2$;

(b) $\big||2x + 3| + | - 3x|\big| \leq 4x$.

Lösung:

(a) $x^2 + 1 > 5x + 2$;
Die zugehörige quadratische Gleichung $x^2 - 5x - 1 = 0$ wird von $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$ gelöst, die Lösungsmengen sind entsprechend für $\mathbb{N}$ $L = \{6, 7, 8, \ldots\}$, für $\mathbb{Z}$ $L = \{\ldots, -3, -2, -1, 6, 7, 8, \ldots\}$ und für $\mathbb{R}$ $L =]-\infty, \frac{5-\sqrt{29}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{29}}{2}, \infty[$.

(b) $\big||2x + 3| + | - 3x|\big| \leq 4x$. Aufgelöst ergibt die Ungleichung

$$-4x \leq |2x + 3| + | - 3x| \leq 4x.$$

Betrachten wir die rechte Seite folgt

$$|2x+3| - 4x \overset{*}{\leq} -3x \overset{**}{\leq} -|2x+3| + 4x.$$

Für (*) folgt

$$-x \leq 2x+3 \leq x,$$

also $x \leq 3$ und $x \leq -3$. Analog folgt für (**)

$$-7x \leq 2x+3 \leq 7x,$$

und somit $x \leq \frac{-1}{3}$ und $x \geq \frac{3}{5}$. Nun kann aber x nicht gleichzeitig kleiner als -3 und größer als $\frac{3}{5}$ sein, also hat die Gleichung keine Lösung. Es gilt für $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ gleichermaßen $L = \emptyset$.

Aufgabe H3 (Ungleichungen grafisch) (6 Punkte)

Bestimmen und skizzieren Sie die Bereiche der (x, y)–Ebene mit:

(a) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 \geq 0$ (*Hinweis*: Kreisgleichung),

(b) $|x+3| + |y-1| \leq 3$.

Welche Punkte der Ebene genügen beiden Ungleichungen? Sie dürfen hierbei Ihre Skizze verwenden.

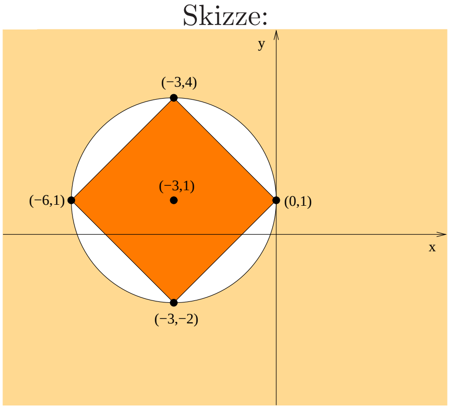
Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 &\geq -(y^2 - 2y + 1) + 9 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 &\geq 9 = 3^2 \end{aligned}$$

Also ist die Lösung die Ebene $\mathbb{R}^2$ ohne die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(-3, 1)$ und Radius 3.

Skizze:



(b) *1. Fall* $y \geq 1$, $x \geq -3$: Dann liest sich die Ungleichung als $x + 3 + y - 1 \leq 3 \Leftrightarrow y \leq -x + 1$.
2. Fall $y \geq 1$, $x < -3$: Dann liest sich die Ungleichung als $-x - 3 + y - 1 \leq 3 \Leftrightarrow y \leq x + 7$.
3. Fall $y < 1$, $x \geq -3$: Dann liest sich die Ungleichung als $x + 3 - y + 1 \leq 3 \Leftrightarrow y \geq x + 1$.
4. Fall $y < 1$, $x < -3$: Dann liest sich die Ungleichung als $-x - 3 - y + 1 \leq 3 \Leftrightarrow y \geq -x - 5$.

Die Lösung ist ein Viereck mit den Ecken $(0, 1), (-3, 4), (-6, 1), (-3, -2)$.
Diese Ecken liegen auf dem Rand der Kreisscheibe, die durch die Gleichung $(x+3)^2+(y-1)^2 = 3^2$ beschrieben wird. Somit ist die Menge der Punkte, die beide Ungleichungen erfüllt, genau die Menge der Ecken $(0, 1), (-3, 4), (-6, 1), (-3, -2)$ des Vierecks.