



14. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Unter- und Obersummen)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $D_f = [0, 2]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei mit $Z_n := \left\{ \left[\frac{0}{n}, \frac{2}{n} \right], \left[\frac{2}{n}, \frac{4}{n} \right], \dots, \left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n} \right] \right\}$ eine äquidistante Zerlegung von $[0, 2]$ gegeben.

- (a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[0, 2]$ und tragen Sie in Ihr Diagramm die Flächenelemente der Unter- bzw. Obersummen bzgl. der Unterteilung Z_5 ein. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Untersummen $s_f(Z_n)$ bzw. der Obersummen $S_f(Z_n)$ an.

(Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel $\sum_{s=1}^k s^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$).

- (b) Bestimmen Sie nun die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} s_f(Z_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(Z_n)$ und geben Sie $\int_0^2 f(x) dx$ an.

Aufgabe G2 (Grundlegende Integrationstechniken)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

- | | | |
|---|--|--------------------------------------|
| (a) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x \right) dx$ | (e) $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2 \right) dx$ | (i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| (b) $\int (x^2 + 3 \cos x) dx$ | (f) $\int (4e^x - 4x^3 + 2x + 5 \sin x) dx$ | (j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ |
| (c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 2x^3 \right) dx$ | (g) $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x} + x^{\frac{3}{5}} \right) dx$ | (k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ |
| (d) $\int \frac{3}{x} dx$ | (h) $\int \sinh x dx$ | (l) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ |

Aufgabe G3 (Unbestimmte Integrale)

Berechnen Sie folgende Integrale

- (a) $\int e^x \cos(x) dx$
(b) $\int x \ln(x) dx$
(c) $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$
(d) $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx$.

Aufgabe G4 (Bestimmte Integrale)

Bestimmen Sie den Wert folgender Integrale

- (a) $\int_0^1 \frac{\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2(x)} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$$

$$(c) \int_0^1 \cos(\sin(x)) \cos(x) dx$$

$$(d) \int_0^{\sqrt[4]{\pi/2}} x^3 \sin(x^4) \cos(x^4) dx$$

$$(e) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1 + \sin(x) + \cos(x))^3} dx.$$