Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
07.02.-11.02.11

13. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit)

(a) Gegeben sei das Polynom P mit

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2$$

und das abgeschlossene Intervall $I = [-2, 2]$.

(i) Ist P stetig auf I?

(ii) Ist P auf I beschränkt?

(iii) Besitzt P auf I ein Maximum bzw. ein Minimum?

(iv) Zeigen Sie, dass P in $[-2, 2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $D(f) = [0, 3]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für} \quad x \in [0, 1], \\ ax - x^3 + x & \text{für} \quad x \in (1, 2), \\ \dfrac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2 + 1} & \text{für} \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a und $b \in \mathbb{R}$ so, dass f auf $D(f)$ stetig ist.

Aufgabe G2 (Differentialrechnung)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

$$f_1(x) = 3x - x^2, \qquad f_2(x) = \frac{x}{1 - x^2} \quad (x \neq \pm 1), \qquad f_3(x) = \sqrt[3]{x^4 + 5}.$$

(b) Stellen Sie die Gleichung derjenigen Tangente an die Parabel f_1 auf, die parallel zur Winkelhalbierenden $y = x$ verläuft. Skizzieren Sie den Sachverhalt.

(c) Zeigen Sie, dass zwar $f_2'(x) > 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gilt, aber f_2 dennoch nicht monoton steigend ist. Wie passt das zusammen? Fertigen Sie eine Skizze von f_2 an.

Aufgabe G3 (Mittelwertsatz)

Zeigen Sie durch Quadrieren und Anwendung des Mittelwertsatzes, dass für $x > 0$

$$\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Aufgabe G4 (Multiple Choice)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie für Ihre Antwort jeweils eine Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ surjektiv, so ist $\inf f = -\infty$.

(b) Ist $f\colon [a,b] \to [c,d]$ bijektiv und differenzierbar, so ist f^{-1} differenzierbar.

(c) Polynome sind unendlich oft differenzierbar.

(d) Ist f oder g nicht differenzierbar, so ist auch $f \circ g$ nicht differenzierbar.

Hausübung

– Abgabe am 14.02.-18.02.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Eigenschaften von Funktionen) (6 Punkte)

(a) Welche der folgenden Funktionen haben ein Maximum und/oder Minimum?

$$f : [-\frac{1}{3}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{x^6 - 3}{x^2 + 4}, \qquad g :]1, +\infty[\to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

(b) Beweisen Sie: Es gibt mindestens eine Lösung $x_0 \in]-1, +\infty[$ der Gleichung:

$$\sin(x) = -\ln(x+1) + 1.$$

Aufgabe H2 (Differentialrechnung) (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen

$$f_1(x) = \Big(x^2 + \frac{1}{x}\Big)^3, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (x \neq 1), \qquad f_3(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$$

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}x & \text{falls } x \leq \frac{1}{2} \\ ax + b & \text{falls } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

differenzierbar ist.
Tipp: Sie muss dafür insbesondere stetig sein.

Aufgabe H3 (Mittelwertsatz) (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für $0 < a < b$ und $n > 1$ die Ungleichungen:

(a) $b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$

(b) $b^n - a^n > n(b-a)a^{n-1}$

Aufgabe H4 (Multiple Choice) (5 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie für Ihre Antwort jeweils eine Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

(b) Ist die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so ist $\sup f = +\infty$.

(c) Eine stetige injektive Funktion ist streng monoton.

(d) Ist f stetig differenzierbar, so ist f' differenzierbar.

(e) Sind f und g nicht differenzierbar, so ist auch $f \circ g$ nicht differenzierbar.