Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
31.1.-4.2.11

12. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Monotonie und Injektivität)
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x) = x\ln(x^2)$ und prüfen Sie mittels Monotonieuntersuchung, auf welchen Gebieten die Funktion injektiv ist.

Aufgabe G2 (Umkehrfunktionen)
Berechnen Sie für folgende bijektive Funktionen die Umkehrfunktionen sowie die zu den Umkehrfunktionen gehörigen Definitionsbereiche:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ (b) $g(x) = \frac{x}{x-1}$ (c) $h(x) = e^{5x} - 8$.

Aufgabe G3 (Grenzwerte)
Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte. Fertigen Sie eine Skizze an.

(a) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x^2-6x-16}{x-8}$, $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-7x+6}{x+3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)$ und $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \le 1 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Aufgabe G4 (Stetige Ergänzung)
Können Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ derart definieren, dass die Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind?

(a) $f(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } x \neq 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(d) $k(x) = \begin{cases} \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} & \text{für } x < 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \\ n(x+1) & \text{für } x > 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

Hinweis zu d): Verwenden Sie $\frac{z^n-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} z^i$ für $z \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G5 (Hyperbolische Funktionen)
Wir definieren die *hyperbolischen Funktionen* über die Exponentialfunktion:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x = \frac{\coth x}{\sinh x}\ (x \neq 0).$$

Fertigen Sie eine Skizze der jeweiligen Funktionsgraphen an. Zeigen Sie unter Benutzung der Definition die folgenden drei Identitäten:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (b) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ (c) $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.

Hausübung

– Abgabe am 7.2.-11.2.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Umkehrfunktionen und Verkettungen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^4} \text{ und } g(x) = x + 1, \text{ definiert auf } D_f = D_g = (0, +\infty).$$

(a) Skizzieren Sie f und g. Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und Injektivität.

(b) Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktionen. Skizzieren Sie diese.

(c) Bilden Sie die Verkettung $h = f \circ g$. Untersuchen Sie auch diese auf Monotonie und Injektivität, und bilden Sie auf direktem Wege ihre Umkehrfunktion.

(d) Für die Umkehrfunktion h^{-1} von $h = f \circ g$ gilt $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Verifizieren Sie daran Ihr Resultat aus (c).

Aufgabe H2 (Berechnung von Grenzwerten) (6 Punkte)

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{-x+8}}$, $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)x}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2-4x+8}{9x^2+8x}$, $\lim\limits_{x \to \infty} x^k \cos(x)$, $k \in \mathbb{Z}$

(c) $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$.

Aufgabe H3 (Stetige Ergänzung) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{für } x < 0 \\ x^3 - 4a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ für $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$ in Abhängigkeit von a.

(b) Für welchen Wert von a lässt sich die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ergänzen?

Aufgabe H4 (Umkehrfunktionen von hyperbolischen Funktionen) (6 Punkte)

Die Umkehrfunktionen arsinh und arcosh der hyperbolischen Funktionen sinh und cosh lassen sich über den natürlichen Logarithmus erklären. Zeigen Sie die folgenden beiden Identitäten:

(a) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ für $x \geq 1$.