Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
24.01.-28.01.11

11. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Grenzwertberechnung)

Berechnen Sie die ersten vier Terme der untenstehenden Folgen. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$\left(a_n = \frac{7n^2}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(b_n = \ \left(2^{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1} \qquad \left(c_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

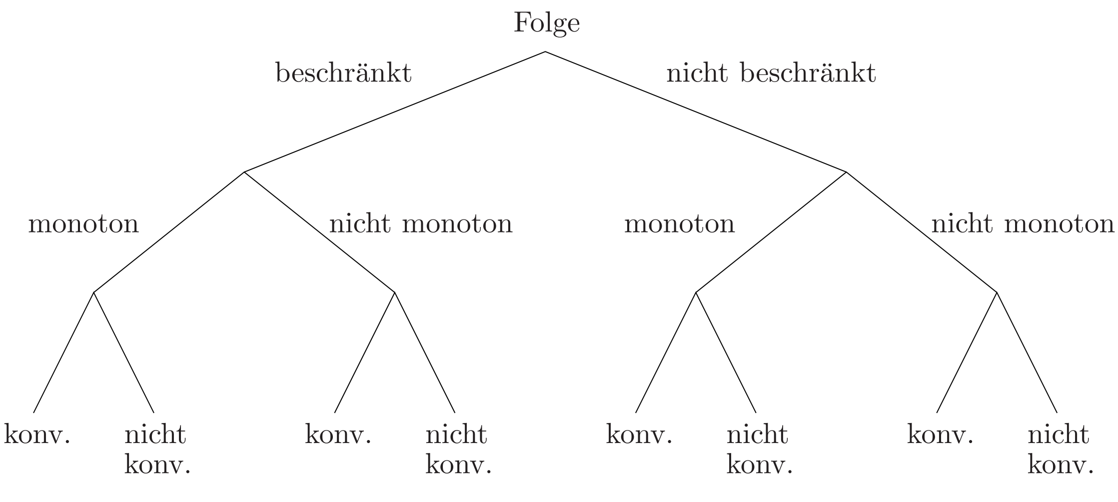
Aufgabe G2 (Rekursive Folgen)

Es seien $c, a_0 > 0$ und die rekursiv definierte Folge $a_0 = c, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \quad n \in N$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert. *Tipp:* Weisen Sie zunächst nach, dass die Folge durch $\sqrt{c}$ beschränkt ist (gilt das für alle Folgeglieder?), und zeigen Sie hiermit die Konvergenz der Folge.

Anmerkung: Dieses Näherungsverfahren zur Bestimmung von $\sqrt{c}$ heißt babylonisches Wurzelziehen oder auch Verfahren von Heron. Die Folge konvergiert rasch (genauer gesagt: quadratisch) gegen $\sqrt{c}$ und wird beispielsweise von Taschenrechnern verwendet, um Wurzeln zu ziehen.

Aufgabe G3 (Folgen)

Ordnen Sie den Astenden in der folgenden Grafik Folgen mit den an den Ästen angegebenen Eigenschaften zu.



Aufgabe G4 (Konvergenzkriterien für Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin(n)}{n^5 + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n}(n-1)}$$

Hausübung

– Abgabe am 31.01.-04.02.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Grenzwertberechnung) (6 Punkte)

Berechnen Sie die ersten vier Terme der untenstehenden Folgen. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$\left(a_n = \frac{7n^3 - 2n + 4}{8n^3 - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(b_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(c_n = \frac{\cos^2(n\pi)}{\sqrt[3]{n}}\right)_{n\geq 1}$$

Aufgabe H2 (Funktionenfolgen) (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise Konvergenz und geben Sie ggf. deren Grenzfunktion an:

(i) $f_n = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0,5];$ (ii) $g_n = \dfrac{nx}{1 + n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Aufgabe H3 (Grenzwertsätze) (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweisen Sie die wahren Aussagen. Geben Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist (a_n) eine divergente Folge mit $|a_n| \leq A < \infty$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(ii) Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) divergent sind, dann ist auch die Folge $(a_n + b_n)$ divergent.

(iii) Ist (a_n) eine konvergente Folge und ist die Folge (b_n) definiert durch $b_n = a_{n+27}$, dann konvergiert auch (b_n) und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(iv) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$.

Aufgabe H4 (Konvergenzkriterien für Reihen) (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n + (-1)^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{70n+8}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \sin(n)}{ne^n}$ (*Tipp:* Die Exponentialfunktion e^x wächst stärker as jede Potenz von x.)