Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
10.01.-14.01.11

9. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Koordinatentransformation)
Die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$) gegeben.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe G2 (Diagonalisierung)
Gegeben seien folgende Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen.

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Welchen Beziehung sehen Sie zwischen der Häufigkeit eines Eigenwertes als Nullstelle des char. Polynoms und der Dimension des zugehörigen Eigenraums?

(d) Geben Sie für $k = 1, \ldots, 4$ – falls möglich – eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S an, für die $A_k = SDS^{-1}$ gilt.

Aufgabe G3 (Eigenwerte und Drehungen)
Es sei $|\theta| \leqslant \pi$. Betrachten Sie die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Eigenwerte von D in Abhängigkeit von θ.

(b) Für welche θ sind die Eigenwerte reell?

(c) Wie kann man den Umstand geometrisch interpretieren, dass D nur für wenige θ reelle Eigenwerte hat?

Hausübung

– Abgabe am 17.01.-21.01.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Koordinatentransformation) (3 Punkte)

Die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$) gegeben.
Bestimme die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe H2 (Überprüfung von Eigenwerten und Eigenvektoren) (5 Punkte)

Betrachten Sie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Ist 2 Eigenwert von A? Begründung!

(b) Prüfen Sie, ob die folgenden Vektoren Eigenvektoren von A sind und geben Sie gegebenenfalls die zugehörigen Eigenwerte an:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es ist nicht immer nötig, Determinanten zu berechnen.

Aufgabe H3 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren) (5 Punkte)

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H4 (Symmetrische Matrizen) (7 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Warum sind diese reell?

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren und normieren Sie diese.

(c) Sei Q die Matrix, die die normierten Eigenvektoren von A als Spalten hat. Ist diese Matrix orthogonal?

(d) Was ist Q^{-1}? Bestimmen Sie $D = Q^{-1}AQ$, was stellen Sie fest?