Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
16.12.-22.12.10

8. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Matrixinversion mit Gauß-Algorithmus)

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Algorithmus.

Aufgabe G2 (Zusammengesetzte lineare Abbildungen)

Wir betrachten die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in z-Richtung auf die x-y-Ebene projiziert und anschließend um die z-Achse um 90° dreht.

(i) Finden Sie die Abbildungsmatrix C für diese lineare Abbildung T.

(ii) Finden Sie die Abbildungsmatrizen A für die orthogonale Projektion auf die x-y-Ebene und B für die Drehung um 90° um die z-Achse.

(iii) Berechnen Sie AB und BA.

(iv) Wir erwarten $C = BA$, erklären Sie geometrisch, warum auch $C = AB$ gilt.

(v) Gilt immer $BA = AB$ für Abbildungsmatrizen, die eine zusammengesetzte lineare Abbildung beschreiben?

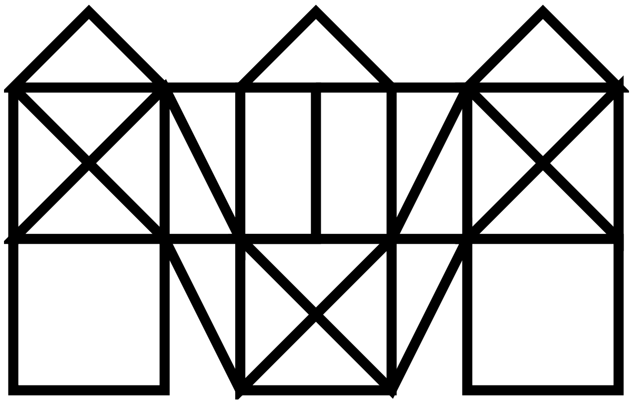
Aufgabe G3 (Aufstellen einer Matrix)

Stellen Sie die Matrix der Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf, die die Vektoren $(1,1)^T$ auf $(1,2)^T$ und $(1,-1)^T$ auf $(2,1)^T$ abildet. Auf welche Vektoren werden $(1,0)^T$ und $(0,1)^T$ abgebildet?

Aufgabe G4 (Das neue Haus vom Nikolaus)

Die vielen Geschenke, die von Jahr zu Jahr mehr werden, passen leider nicht mehr in das kleine Haus vom Nikolaus. Deshalb hat der Nikolaus jetzt ein neues, viel größeres Haus gebaut (Abbildung 1). Kann man dieses größere Haus vom Nikolaus immer noch komplett in einem Zug zeichnen, ohne den Stift dabei abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu malen?

Abbildung 1: Das große Haus vom Nikolaus



Hausübung

– Abgabe am 10.1.-14.1.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Existenz der Inversen und Inversenberechnung) (6 Punkte)

Sind folgende Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie im Falle der Invertierbarkeit die Inverse.

Aufgabe H2 (Drehungen in $\mathbb{R}^3$) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, daß

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix ist.

(ii) Bestimmen Sie den Drehwinkel φ.

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{v}$, welcher die Drehachse erzeugt, mit $v_3 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Aufgabe H3 (Orthogonale Projektion auf eine Ebene) (4 Punkte)

Gegeben sei die Ebene $E : \lambda(1, 0, -1)^T + \mu(1, -2, 1)^T$ in Parameterform.

(i) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\mathbf{n}$ zur Ebene.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion P auf E, sowie deren Rang.

Aufgabe H4 (Aufstellen einer Matrix) (6 Punkte)

Stellen Sie die Matrix der linearen Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf, die die Vektoren $(1, 0, 0)^T$ auf $(1, 1, 0)^T$, sowie $(1, 1, 0)^T$ auf $(1, 1, 1)^T$ und schließlich $(1, 1, 1)^T$ wieder auf $(1, 0, 0)^T$ abbildet. Auf welche Vektoren werden die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ unter dieser Abbildung abgebildet?

Wiederholungsaufgaben

Wiederholungsaufgabe 1 (Abstand windschiefer Geraden)
Gegeben seien folgende Geraden

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$h : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass g und h windschief zueinander sind, d.h. g ist nicht parallel zu h und haben auch keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

b) Zeigen Sie, dass g und h in zwei parallel zueinander verlaufenden Ebenen liegen und bestimmen Sie diese.

c) Berechnen Sie den Abstand beider Geraden g und h.

Wiederholungsaufgabe 2 (Gleichungen Ungleichungen)

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die der Ungleichung

$$\frac{x-2}{x^2-4} \leq 0, \qquad x \neq \pm 2$$

genügen.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{x+1}{x^2+1} = 1?$$

c) Für welche komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z-1| = |\overline{z}+1|$?