Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
02.12.-15.12.10

# 7. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

**Hinweis:** In der Woche vom 06.12.-10.12.10 finden aufgrund der Veranstaltung „Einführung in den Maschinenbau“ keine Vorlesungen und Übungen statt. Dieses Blatt wird in den Übungen am 2./3.12.10 sowie 13./15.12.10 behandelt. Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in den Übungen vom 16.-22.12.10. Die Übungen im neuen Jahr starten am 10.01.11.

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Berechnung von Determinanten)

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten (ohne lange Rechnungen!):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 21 & -2 & 17 \\ 2 & -5 & -4 & -1 \\ -3 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & -43 & -16 & 36 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe G2** (Eigenschaften von Determinanten)

Für $a$, $b \in \mathbb{C}$ seien folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & 3 & b \end{pmatrix}.$$

In Abhängigkeit von den Parametern, beantworten Sie die folgenden Fragen für $A$ und $B$:

(a) Berechnen Sie die Determinante.

(b) Ist der Rang maximal?

(c) Sind die Zeilen/Spalten linear unabhängig?

(d) Ist die Matrix invertierbar? Für die Werte $a = 0$ und $b = 0$ bestimmen Sie die entsprechenden Inversen. Verwenden Sie dazu die Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^T.$$

Dabei sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $A^* = (a^*_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ihre adjungierte Matrix, d.h. $a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ und $A_{ij}$ entstehe aus $A$ durch Streichen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte.

(e) Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von $A^{-1}CA$ und vergleichen Sie sie mit der Determinanten von $C$.

**Aufgabe G3** (Dreiecksmatrizen)
Seien $A$ und $B$ obere Dreiecksmatrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Die folgende Gleichung für Determinanten wurde bereits in der VL betrachtet, allerdings ohne Beweis. Hier wollen wir diese für obere Dreiecksmatrizen nachweisen. Zeigen Sie:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

(b) Folgern Sie mit Hilfe von (a), dass $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ gilt, falls $A$ invertierbar ist.

(c) Was kann über die Einträge von $A$ gesagt werden, falls $A$ invertierbar ist?

(d) Gilt die Gleichung aus (a) auch für untere Dreiecksmatrizen?

# Hausübung

– Abgabe am 16.12.-22.12.10 in der Übung –

**Aufgabe H1** (Berechnung von Determinanten) (6 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$

(a) mittels der Entwicklung nach Zeilen oder Spalten

(b) mittels elementarer Umformungen zu einer oberen Dreiecksmatrix.

**Aufgabe H2** (Inverse einer Matrix) (4 Punkte)
Mit Hilfe von Determinanten bzw. adjungierten Matrizen bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ -3 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H3** (Vandermonde-Matrix) (4 Punkte)
Beweisen Sie die folgende Gleichung für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\det V = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b).$$

**Aufgabe H4** (Rechenregeln) (6 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ invertierbar. Weiter gelte $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$ gilt.

(b) Sei $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ eine obere Dreiecksmatrix und invertierbar. Es gelte $\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$. Zeigen Sie, dass $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ gilt.