Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
25.11.-01.12.10

6. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Gleichungssysteme)

Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem (i) genau eine Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen, (iii) keine Lösung?
Bestimmen Sie die Lösungsmengen für alle drei Fälle. Geben Sie bei der Ausführung des Gauß-Algorithmus bitte alle Elementarumformungen an.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a^2-5)x_3 & = & a \end{array}$$

Aufgabe G2 (Vertauschbarkeit in Matrixprodukten)

Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

finde man eine (3×2)-Matrix B, so daß gilt $AB = E$. Berechnen Sie schließlich das Produkt BA und vergleichen Sie. Warum gilt $(BA)^2 = (BA)$?

Aufgabe G3 (Struktur Linearer Gleichungssysteme)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Rang und Kern von A. Verifizieren Sie hieran die Identität

$$\dim \operatorname{kern}(A) + \operatorname{rang}(A) = 5.$$

(ii) Betrachten Sie nun das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{mit } \mathbf{b} = (0, 2, 4, 4)^T.$$

Verifizieren Sie, daß $\mathbf{x}_s = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine spezielle Lösung dieses inhomogenen Systems darstellt. Wie erhalten Sie mit ihr die vollständige Lösungsmenge des Systems?

Hausübung

– Abgabe am 02.12.-08.12.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme) (6 Punkte)

Beantworten Sie mit Begründung die folgenden Fragen.

(i) Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m < n$ genau eine Lösung haben?

(ii) Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m > n$ unendlich viele Lösungen haben?

(iii) Kann ein homogenes lineares Gleichungssystem genau eine nichttriviale Lösung haben?

Aufgabe H2 (Lineare Gleichungssysteme) (8 Punkte)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_2 + \alpha x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \beta \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

in eine Matrixgleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um und bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahren (bitte jede Elementarumformung angeben!) in Abhängigkeit von α und β:

(i) Den Rang der Matrix A und der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$.

(ii) Die Anzahl der Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mittels des Rangkriteriums.
D.h. gibt es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen?

(iii) Die Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Aufgabe H3 (Rang und Kern einer Matrix) (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie den Kern von A.

(ii) Welchen Rang hat A und welche Dimension hat der Kern von A? Verifzieren Sie die Dimensionsformel.