Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
18.11.-24.11.10

5. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Teilräume)
Sind die folgenden Mengen Teilräume des $\mathbb{R}^2$?

$$A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cup \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$
$$B = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : 2v_1 - v_2 = -1\},$$
$$C = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : 2v_1 - v_2 = 0\}.$$

(a) Zeichnen Sie die Mengen A, B und C.

(b) Beantworten und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Antwort:

	ist Teilraum	ist nicht Teilraum
A		
B		
C		

Aufgabe G2 (Basis, Dimension von linearen Teilräumen)

Betrachten Sie $U := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sowie $V := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

(a) Zeigen Sie: $U = V$

(b) Welche Dimension haben U bzw. V ? Geben Sie Basisvektoren an für U bzw. V.

(c) Vervollständigen Sie die Basis von U zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G3 (Matrizenmultiplikation)

Es seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ reelle Matrizen.

(a) Welche der Produkte $AB, AC, BA, BC^T, CA, C^TA, CC, C^TC$ sind definiert? Berechnen Sie diese und geben Sie das Format des jeweiligen Produktes an.

(b) Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Aussagen:

i. Für beliebige quadratische Matrizen A und B gilt stets $AB = BA$.

ii. Ist das Produkt zweier Matrizen die Nullmatrix, so muss mindestens eine dieser Matrizen die Nullmatrix sein.

Hausübung

– Abgabe am 25.11.-01.12.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Lineare Teilräume) (7 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen $T_1,\ T_2,\ T_3$, ob sie ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ist? Begründen Sie Ihre Antworten. Beschreiben Sie jede Menge geometrisch.

(a) $T_1 := \{\, (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 5\}$

(b) $T_2 := \{\, (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

(c) $T_3 := \{\, (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_1 - x_2\}$

Aufgabe H2 (Basis, Dimension von linearen Teilräumen) (5 Punkte)

Die Menge $U := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie eine Basis von U an.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

(c) Vervollständigen Sie die Basis von U aus (a) zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe H3 (Matrizenmultiplikation) (8 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Welche der Produkte A^2, AB, AD, BD, DB, CD, DC^T sind definiert? Berechnen Sie diese und geben Sie das Format des jeweiligen Produktes an.

(b) Die Matrixprodukte AD, BD, CD erhält man als eine der folgenden elementaren Umformungen von D. Ordnen Sie jeweils die Produkte AD, BD, CD zu:

  i. *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeilein der Matrix D,*

  ii. *Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl,*

  iii. *Vertauschen von Zeilen.*