



4. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Geraden im \mathbb{R}^3)

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in Parameterform, die durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

und $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft. Überprüfen Sie, ob der Punkt $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegt.

Berechnen Sie den Abstand der Geraden vom Ursprung.

Aufgabe G2 (Senkrechte auf einer Ebene)

- (i) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene, die durch den von $P = (2, 3, 4)^T$ bestimmten Punkt geht und senkrecht auf der Geraden g steht. Hierbei ist:

$$g: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen.

Aufgabe G3 (Schnitt Ebene mit Geradenschar)

Gegeben sei die Ebene

$$E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9.$$

- (i) Bestimmen Sie die Hessesche Normalenform der Ebene E und deren Abstand zum Ursprung.
(ii) Geben Sie eine Parameterdarstellung von E an.
(iii) Betrachten Sie folgende Schar von Geraden, gegeben durch

$$g_t: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei t ein flexibel wählbarer Parameter aus \mathbb{R} ist.

Wie muss der Parameter t gewählt sein, damit es einen Schnittpunkt der Ebene mit einer solchen Geraden gibt? Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist g_t parallel zu E ? Wie groß ist in diesen Fällen der Abstand von g_t zu E ? Geben Sie in den Fällen der Nichtparallelität den gemeinsamen Schnittpunkt in Abhängigkeit vom Parameter t an.

Hausübung

– Abgabe am 18.11.-24.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (zwei Geraden im \mathbb{R}^2)

(5 Punkte)

Gegeben seien die Geraden

$$g_1: \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2: x_1 - x_2 = 1.$$

- (i) Geben Sie von beiden Geraden die Hessesche Normalenform an.
- (ii) Wie lautet der gemeinsame Schnittpunkt beider Geraden?
- (iii) Berechnen Sie den Schnittwinkel beider Geraden.

Aufgabe H2 (Ebene im \mathbb{R}^3)

(7 Punkte)

(i) Stellen Sie die Gleichung der Ebene E auf, die durch die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verläuft.

- (ii) Bestimmen Sie die Hessesche Normalenform dieser Ebene und geben Sie den Abstand von E zum Koordinatenursprung an.
- (iii) Verifizieren Sie zunächst, dass der Punkt $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Ebene liegt. Wie weit ist er vom Ursprung entfernt? Stellen Sie die Gleichung der Geraden g auf, die die Ebene im Punkt Z senkrecht durchstößt.
- (iv) Geben Sie alle Geraden an, die im Abstand 1 parallel zur Ebene E verlaufen. Benutzen Sie dabei allgemeine Parameter a und b .

Aufgabe H3 (Gegenseitige Lage einer Ebene mit zwei Geraden)

(8 Punkte)

Gegeben sei folgende Ebene in der Parameterdarstellung

$$E: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Geraden g

$$g: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und h

$$h: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage und den Abstand der Ebene zu beiden Geraden. Im Falle, dass sich die Ebene mit einer Geraden schneidet, geben Sie den Schnittpunkt an.