Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
04.11.-10.11.10

3. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rechnen mit Vektoren)

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Zielpunkt, der sich ausgehend vom Ursprung durch nachfolgende Wegbeschreibung ergibt und zeichnen Sie den Weg auf:

(a) Laufen Sie zunächst den Vektor $\mathbf{v}_1$ ab.

(b) Dann zweimal in Richtung von $\mathbf{v}_2$.

(c) Bilden Sie $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ und gehen in entgegengesetzter Richtung die halbe Strecke.

(d) Laufen Sie schliesslich entlang des Vektors $\mathbf{v}_4$ die $2,5$-fache Strecke zum Zielpunkt.

Aufgabe G2 (Linearkombination von Vektoren)

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Welcher der Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$?

Aufgabe G3 (Vektorprodukt, Skalarprodukt)

Im folgenden sei ein kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ das Bezugssystem.

(a) Sei im $\mathbb{R}^3$ das Dreieck ABC gegeben mit $A = (3, 0, -1)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (5, -6, 1)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

(b) Ein Objekt, das sich nur entlang der x-Achse bewegen kann, wird mit einer konstanten Kraft von $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ N gezogen. Wie groß ist die Arbeit, die verrichtet wurde, wenn das Objekt 5m in positiver x-Richtung bewegt wurde?
Hinweis. Es gilt das Gesetz $\mathbf{Arbeit} = \langle \mathbf{Kraft}, \mathbf{Weg} \rangle$.

Hausübung

– Abgabe am 11.11.-17.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Rechnen mit Vektoren, Lineare Unabhängigkeit) (7 Punkte)

Gegeben seien für $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, wenn möglich, folgende Ausdrücke und veranschaulichen Sie diese graphisch:

$$i)\ \mathbf{w} + \mathbf{x} - \mathbf{y}, \qquad ii)\ 2\mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{y} - 3\mathbf{z}, \qquad iii)\ \mathbf{w}\mathbf{y} + \mathbf{w}\mathbf{z}, \qquad iv)\ w_1\mathbf{y} + w_2\mathbf{z}$$

(b) Sind die Vektoren linear unabhängig?

(c) Stellen Sie $\mathbf{z}$ als Linearkombination von $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ dar. Ist dies eindeutig?

(d) Sind die Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{x}$ linear unabhängig? Gilt das für beliebige $a \in \mathbb{R}$?

Aufgabe H2 (Skalarprodukt) (7 Punkte)

Gegeben sind die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(a) Berechnen Sie die alle Skalarprodukte $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, $\ldots$, $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle$.

(b) Berechnen Sie die Normen der drei Vektoren.

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

(d) Überprüfen Sie ihre Ergebnisse, indem Sie die drei Vektoren zeichnen und die Längen und Winkel messen oder schätzen.

Aufgabe H3 (Spatprodukt) (6 Punkte)

Spannen folgende Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ein Parallelotop auf? Falls ja, bestimmen Sie das Volumen. Falls nein, was bedeutet das geometrisch für $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$?

(a) $\mathbf{a} = (1, -2, 1)^\top$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)^\top$, $\mathbf{c} = (-2, 1, 3)^\top$

(b) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^\top$, $\mathbf{b} = (1, -1, -1)^\top$, $\mathbf{c} = (3, 0, -1)^\top$