Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
28.10.-3.11.10

2. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Beweistechniken)
Es gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Geben Sie zwei Beweise (mit und ohne vollständige Induktion) für diese Tatsache an.

Aufgabe G2 (Konjugiert komplexe Zahlen)
Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) heißt $\overline{z} := a - ib$ die zu z komplex konjugierte Zahl.

a) Skizzieren Sie die Zahlen z und $\overline{z}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Berechnen Sie $\overline{(\overline{z})}$, $|\overline{z}|$, $z + \overline{z}$ sowie $z \cdot \overline{z}$ und zeigen Sie, dass $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$ gilt, sofern $z \neq 0$ erfüllt ist.

c) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.

Aufgabe G3 (Rechnen mit komplexen Zahlen)
Gegeben seien folgende komplexe Zahlen

$$z_1 := (3 + 4i), \qquad z_2 := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}.$$

a) Bestimmen Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag der komplexen Zahlen z_1 und z_2.

b) Berechnen Sie: $z_1^2, |z_1^2|, z_2^2, \overline{z_1 \cdot z_2}, \overline{z_1 + z_2}, \overline{z_1 - z_2}, z_1^{-1}$ und z_2^{-1} und geben Sie diese Zahlen in der Standardform $a + ib$ mit den reellen Komponenten $a, b \in \mathbb{R}$ an.

c) Skizzieren Sie diese Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene. Fällt Ihnen etwas auf?

Hausübung

– Abgabe am 04.11.-10.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Mengen von komplexen Zahlen) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = |z+2|\}$$

und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe H2 (Rechnen mit komplexen Zahlen) (8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i}, \quad z_2 := (6+8i)^2.$$

a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag dieser komplexen Zahlen.

b) Berechnen Sie die multiplikativ inversen Elemente z_1^{-1} und z_2^{-1} und geben Sie diese in der Form $(a+ib)$ an.

Aufgabe H3 (vollständige Induktion) (6 Punkte)

Im folgenden seien $z_1, z_2, \cdots, z_n$ beliebige komplexe Zahlen. Zeigen Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass gilt:

a) $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \cdots \cdot \overline{z_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ und geben Sie den exakten Wert der Summe $(1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3)$ an.