Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. habil. Sören Kraußhar
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
21.10.-27.10.10

1. Übungsblatt zur „Mathematik I für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Beweistechniken)

Geben Sie zwei Beweise

$$\sum_{k=0}^{n} 2k+1 = (n+1)^2.$$

(Hinweis: Teleskopsumme).

Aufgabe G2 (Beträge und Ungleichungen)

1. Aus der Definition des Betrages ergibt sich sofort für $a \in \mathbb{R}$: $|a| \geq 0$ und $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.
   Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
   (i) $|ab| = |a|\,|b|$ (mittels Fallunterscheidung),
   (ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung: "$\triangle$-Ungl."),
   (iii) $|\,|a| - |b|\,| \leq |a-b|$.
2. Beschreiben Sie die Ungleichungen

   $$\text{(i)} \quad |x-1| \geq 5 \qquad \text{(ii)} \quad |x-1| \leq 5$$

   jeweils möglichst einfach durch mehrere Ungleichungen mit logischen Verknüpfungen ohne Verwendung des Betrages.
   Bestimmen Sie die Lösungsmengen und skizzieren Sie diese auf dem Zahlenstrahl.

Aufgabe G3 (Intervallschachtelung)

Approximieren Sie mittels Intervallschachtelung die reelle Zahl $\sqrt{5}$ bis zur fünften Nachkommastelle genau.

Hausübung

– Abgabe am 28.10.-03.11.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Beweistechniken) (8 Punkte)

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Geben Sie zwei Beweise (mit und ohne vollständige Induktion) für diese Tatsache an.

Aufgabe H2 (Ungleichungen grafisch) (6 Punkte)

Bestimmen und skizzieren Sie die Bereiche der (x, y)–Ebene mit:

(a) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 \geq 0$ (*Hinweis*: Kreisgleichung),

(b) $|x + 3| + |y - 1| \leq 3$.

Welche Punkte der Ebene genügen beiden Ungleichungen? Sie dürfen hierbei Ihre Skizze verwenden.

Aufgabe H3 (Kreise) (6 Punkte)

Geben Sie Beweise für die folgenden Sachverhalte:

(i) Seien K_1, K_2 zwei sich berührende Kreise mit Radien r_1, r_2, die eine Gerade in den Punkten x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ berühren. Für den Abstand $|x_2 - x_1|$ der beiden Berührpunkte gilt dann: $|x_2 - x_1| = 2\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}$ (Hinweis: Satz von Pythagoras).

(ii) Seien $K_1, \ldots K_{2n}$ eine gerade Anzahl von Kreisen, die eine gegebene Gerade in Punkten $x_1, \ldots, x_{2n}$ so berühren, dass sich benachbarte Kreise K_i und K_{i+1} für $i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$, sowie K_1 und K_{2n} berühren. Dann gilt für das „Multiverhältnis "

$$[x_1, \ldots, x_{2n}] := \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \cdots (x_{2n-1} - x_{2n})}{(x_2 - x_3) \cdots (x_{2n-2} - x_{2n-1})(x_{2n} - x_1)} = -1$$

(Hinweis: nicht immer ist vollständige Induktion die beste Methode).