Exercise:
The fibonacci series is defined as follows:
fib(0) = 0, fib(1) = 1 and fib(n+1) = fib(n-1) + fib(n)
We would like to know whether f(n) might be expressible as

$$fib(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right)$$

We would like to get some information fast and without lots of hand work.
How can we start working at the exercise? How can Maple help us?

Lösung:
Relativ schnell ist klar:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{0} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{0} \right)$$

$$0 \tag{1}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{1} \right)$$

$$1 \tag{2}$$

Nun muss noch gelten, dass

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Sehr schnell lassen sich zumindest ein paar große Zahlen einsetzen und der Ausdruck mittels simplify vereinfachen. Z.b 876:

$$simplify\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{876-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{876-1} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{876} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{876} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{876+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{876+1} \right) \right)$$

$$0 \tag{3}$$

Deutlich trickiger wird es, wenn man Maple mittels simplify dazu bringen will, die Gleichheit für

allgemeine n zu zeigen. Manchmal hilft ein expand des Ausdrucks.
Man sieht hieran wieder, dass simplify eine heuristische Vereinfachungsfunktionalität bereit stellt, die man sehr mit Vorsicht genießen sollte:

$$expand\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right);$$

$$\frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}-\frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}+\frac{1}{10}\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}-\frac{1}{10}\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n} \tag{4}$$

$$simplify\left(expand\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)\right);$$

$$0 \tag{5}$$