Wiederholungsaufgaben zu Analysis II

Anbei einige Aufgaben zur Aufarbeitung von Ana II und Vorbereitung auf die Klausur. Es gilt das Grundprinzip: Nachdenken und Argumentieren ist immer besser als Rechnen, inhaltiche Präzision besser als formale Präzision. Die Sammlung wird voraussichtlich noch erweitert. Die Aufgaben für ET liegen zum Teil unter dem für Mathematiker und Phyisker vorgesehenen Niveau.

Sprechstunden der Tutoren sind ca. 2 Wochen vor der Klausur eingeplant. Wenn Sie vorher Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor oder an Horst Heck, um gegebenenfalls Sprechstunden vorzuziehen.

Extrema. Untersuchen Sie f auf lokale Extrema und Extrema

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} x_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^{5} x_i^2$$

Extrema. Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie: es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u^2 + v^2 + w^2 \;\text{ für } g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

und f ist differenzierbar und zweimal stetig partiell differenzierbar. Untersuchen Sie f auf lokale Extrema und Extrema

Extrema unter Nebenbedingung. Für $a, b, c > 0$ sei

$$V(a,b,c) = \{ \begin{pmatrix} ax \\ by \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq c\}$$

Definieren Sie auf geeignete Weise den zugehörigen OberFlächenInhalt $F(a,b,c)$ und lösen Sie die Minimierungsaufgabe für F unter der Nebenbedingung $\mu(V(a,b,c)) = 1$.

Tangentialraum und implizite Funktionen. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

eine Untermannigfaltigkeit M definiert, bestimmen Sie eine Basis des Tangetialraums und eine Basis des Normalenraums im Punkt

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass z in einer Umgebung des Punktes

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

als implizite Funktion f von x und y bzgl. M darstellbar ist und bestimmen Sie die Jacobimatrix von f im Punkt

Bereichsintegral. Seien $a, b, R > 0$ und

$$B = \{r\begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix} \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$$

Bestiemmen Sie eine Folge Z_n von Zerlegungen von B mit Weite $\to 0$ und Zellen $C \subseteq B$ und benutzen Sie diese um

$$\int_{(x,y)^t \in B} \sqrt{x^2+y^2}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

als Limes von Summationen zu den Z_n zu bestimmen.

Cavalieri. Seien $c < d$ in $\mathbb{R}$ und

$$B_t \subseteq \mathbb{R} \times \{t\}, \quad B = \bigcup_{t\in[c,d]} B_t$$

1. Seien die B_t messbar und $t \mapsto \mu(B_t)$ stetig. Folgt, dass B messbar ist?
2. Sei B messbar. Folgt, dass die B_t messbar sind?
3. Zeigen Sie: Ist B Normalbereich bzgl. der t-Achse, so sind B und die B_t messbar und es gilt
$$\mu(B) = \int_c^d \mu(B_t)\,\mathrm{d}t$$

Cavalieri. Gegeben sei ein Kreiskegel K im Raum mit Spitze S und eine Ebene E, die diesen in einer Ellipse mit Flächeninhalt G schneidet. Sei h der Abstand zwischen S und E. Sei V das von K und E eingeschlossene Volumen. Für einen Punkt P auf dem Lot von S auf E sei E_P die zu E parallele Ebene durch P und G_P der Flächeninhalt dem von $E_P \cap K$ eingeschlossenen Fläche.

1. Argumentieren Sie, dass die genannten Flächeninhalte und Volumina existieren
2. Bestimmen Sie G_P aus G und $d(P,S)$
3. Bestimmen Sie V aus G und h

Benutzen Sie in b) und c) das Prinzip von Cavalieri.

Cavalieri und Guldin. Bzgl. eines ON-Koordinatensytems im Raum sei folgende Punktmengen gegeben

$$P = \{\begin{pmatrix}x\\y\\x^2+y^2\end{pmatrix} \mid x^2+y^2 \le 1\},\ \ V = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le x^2+y^2\}$$

1. Wie kann man P als Fläche verstehen und wie ist dann der Flächeninhalt definiert? Bestimmen Sie diesen Flächeninhalt nach der zweiten Guldinschen Regel und erläutern Sie die Korrektheit der Methode anhand einer Skizze zu diesem Beispiel

2. Begründen Sie, dass V messbar ist und bestimmen Sie das Volumen mittels der ersten Guldinschen Regel. Erläutern Sie die Korrektheit dieser Regel anhand einer Skizze zu diesem Beispiel

3. Bestimmen Sie das Volumen von V mittels des Prinzips von Cavalieri. Erläutern Sie die Korrektheit dieses Prinzips anhand einer Skizze zu diesem Beispiel

Gaußscher Integralsatz. Gegeben seien für $(i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ die stetigen und aber auf K_{ij}^o nicht differenzierbaren Abbildungen

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij} : K_{ij} \to \mathbb{R}, \ \ \alpha_{ij}|K_{ij}^o < \beta_{ij}|K_{ij}^o$$

und das Volumen

$$V = V_{ij} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K_{ij}, \ \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq z \leq \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \}, \quad \text{für alle } (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$$

Geben Sie hinreichende Bedingungen an die α_{ij}, β_{ij} dafür an, dass man auf V den Gaußschen Integralsatz anwenden kann und begründen Sie dies dann.

Rotation. Sei $\vec{F}$ auf dem Inneren einer Kugel definiertes zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie: Es gibt ein Gradientenfeld $\vec{G}$ so, dass

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{H} \qquad \text{wobei } \vec{H}(\vec{x}) = (\text{rot}\vec{F})(\vec{x}) \times \vec{x}$$

Graphen. Zeigen Sie: Eine einfache treue Parametrisierung (ϕ, K) ist genau dann bzgl. eines positiv orientierten ON-Koordinatensystems κ zu geeigneten i-j-Graphen äquivalent für alle $(i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, wenn $\det A_k(\vec{x}) > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathsf{dom}\phi$ und $k = 1,2,3$ - dabei ist $A_k(\vec{x})$ die Matrix, die man aus $J_\phi(\vec{x})$ durch Streichen der k-ten Zeile erhält.

Grüner Bereich. In der Ebene konnten wir bei der Definition grüner Elementarbereiche in 26.6 auch stückweise stetig differenzierbare α, β zulassen. Ist ein analoges Vorgehen auch im Raum möglich? Begründung!

Flächenbegriff. Betrachten Sie folgende Version einer Definition von “einfacher Parametrisierung” und “Äquivalenz”:

- $(\phi, K) \in \mathcal{P}_d$ falls $K \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ kompakt, messbar und wegzusammenhängend und $\phi : K \to \mathbb{R}^d$ stetig und ϕ auf K^o stetig differenzierbar mit Jacobimatrix von Rand $d-1$

- $(\phi, K) \sim_{\mathcal{P}_d} (\psi, H)$ für $(\phi, K), (\psi, H) \in \mathcal{P}_d$, falls es Homöomorphismus $]si : H \to K$ gibt, $\sigma|K^o : K^o \to h^o$ Diffeomorphismus, $\det D\sigma >$ auf H^o und $\psi = \phi \circ \sigma$

Diese Definitionen sind für die Behandlung der Integralsätze in Dimension

$$d=2: \quad \text{geeignet } \bigcirc \quad \text{ungeeignet } \bigcirc$$

$$d=3: \quad \text{geeignet } \bigcirc \quad \text{ungeeignet } \bigcirc$$

Begründungen!

Zylinder. Sei

$$V=\{\begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\ z\end{pmatrix} \mid 0\le r\le 1,\ 0\le t\le 2\pi,\ 0\le z\le 1\}$$

Bestimmen Sie eine Parametrisierung (ϕ, K) so, dass $\partial V = \mathsf{Spur}(\phi, K)$ und

$$\int_{u\in K} \vec{F}(u)\cdot \vec{n}_\phi(u) = \int_{x\in V} (\operatorname{div}\vec{F})(x)$$

für jedes auf einer offenen Umgenung von V stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{F}$.

Zylinderkoordinaten. Sei

$$V=\{\begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\ z\end{pmatrix} \mid 0\le r\le 1,\ 0\le t\le 2\pi,\ 0\le z\le 1\}$$

Sei definiert

$$\phi\begin{pmatrix} t\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t\\ \sin t\\ z\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} t\\ z\end{pmatrix}\in B=\{\begin{pmatrix} t\\ z\end{pmatrix} \mid 0\le t\le 2\pi,\ 0\le z\le 1\}$$

$$\phi_1\begin{pmatrix} r\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos -t\\ r\sin -t\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} r\\ t\end{pmatrix}\in C=\{\begin{pmatrix} r\\ t\end{pmatrix} \mid 0\le r\le 1,\ 0\le t\le 2\pi\}$$

$$\phi_2\begin{pmatrix} r\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\ 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} r\\ t\end{pmatrix}\in C$$

Zeigen Sie für jedes auf einer offenen Umgenung von V stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{F}$

$$\int_{u\in C} \vec{F}(u)\cdot \vec{n}_{\phi_1}(u) + \int_{u\in C} \vec{F}(u)\cdot \vec{n}_{\phi_2}(u) + \int_{u\in B} \vec{F}(u)\cdot \vec{n}_{\phi}(u) = \int_{x\in V} (\operatorname{div}\vec{F})(x)$$

Alte Klausuraufgaben für ET

Wegintegrale.

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei das Vektorfeld $\vec{F}$ gegeben mit den Komponenten

$$F_1(x,y) = 2x + \sin y, \quad F_2(x,y) = y + x\cos y$$

   Bestimmen Sie ein Potential (Stammfunktion) $\phi(x,y)$ von $\vec{F}$ und das Wegintegral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ für den Weg

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei das Vektorfeld $\vec{F}$ gegeben mit den Komponenten

$$F_1(x,y) = x + y, \quad F_2(x,y) = xy$$

   Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ für den Weg

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$$

Bereichsintegrale.

1. Gegeben sei

$$B = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \text{ und } y \geq 0\}$$

   Bestimmen Sie das Riemann-Integral $\int_B y \, \mathrm{d}(x,y)$. Geben Sie dazu die Substitution gemäß der Definition in 25.4 an.

2. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ xy \leq 1,\ x - 1 \leq y \leq x + 1\}$$

   Schreiben Sie $\int_B f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$ als Summe von iterierten Integralen der Form $\int_a^b \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} f \mathrm{d}v\mathrm{d}u$

Aufgabe

1. Taylorpolynom. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $j_0^3(f)(x) = T_6(x,0)$ 6.Grades an der Stelle 0 für

$$f(x) = (\sin x)(\cos x)$$

2. Jacobimatrix. Die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ y \ln x \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix.

Wegintegrale. Auf $\mathbb{R}^2$ sei das Vektorfeld $\vec{F}$ gegeben mit den Komponenten

$$F_1(x,y) = x^2 y + y, \quad F_2(x,y) = xy + x$$

1. Besitzt $\vec{F}$ ein Potential (Stammfunktion)? Begründung!
2. Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ für den Weg

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

   oder begründen Sie, dass es nicht extistiert.

Bereichsintegrale. Gegeben sei

$$B = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } y \geq |x| - 1) \}$$

Bestimmen Sie das Riemann-Integral

$$\int_B (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}(x,y)$$

Differentiation. Die Abbildungen $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad G(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos u + \sin v \\ \sin u + \cos v \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen

$$J_F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), \quad J_G(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})$$

und leiten Sie daraus die Jacobimatrix $J_H(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ von $H = G \circ F$ her.

Taylorpolynom. Bestimmen Sie durch Substitution das Taylorpolynom $j_0^3(f)(x) = T_3(x, 0)$ 3.Grades an der Stelle 0 für

$$f(x) = \ln(1 + \arctan x)$$

Extremwerte. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Welches lokale Extremwertverhalten liegt an der Stelle $\mathbf{0}$ vor? Begründung!

Potenz- und Taylorreihen. a) Bestimmen Sie die vierte Ableitung von $\arctan x$ an der Stelle 0.

b) Begründen Sie, dass $\int_0^x \arctan t \, \mathrm{d}t$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ durch seine Taylorreihe dargestellt wird und geben Sie für diese die Terme bis zur fünften Potenz an.

Volumen(integrale) Der Torus T bestehe aus allen Punkten von $\mathbb{R}^3$, die vom Kreis $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 9\}$ Abstand $\leq \sqrt{3}$ haben. a) Bestimmen Sie das Volumen von T.

b) Bestimmen Sie $\int_T z \,\mathrm{d}(x,y,z)$. Das geht mit guten Argumenten auch ohne Rechnung.

Differentiation. Die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to R^2$ sei gegeben durch

$$F((x,y,t)^T) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass F auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar ist.

b) In welcher Richtung hat das Skalarenfeld $x\cos t - y \sin t$ den stärksten Anstieg an der Stelle $(1,1,0)^T$?

Wegintegrale. Auf $\mathbb{R}^2$ sei das Vektorfeld $\vec{F}$ gegeben mit den Komponenten $F_1(x,y) = 2xy + y^3$ und $F_2(x,y) = x^2 + 3xy^2$. Bestimmen Sie $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ für den Weg Γ gegeben durch

$$a)\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix},\ t \in [0,1] \quad \text{bzw.} \quad b)\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{t-2\pi} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\ t \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$$

Zum Nachdenken. Sei $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, $t \in [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\|\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t)\| \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Welche geometrische Bedeutung hat das folgende Integral und warum?

$$\int_a^b \frac{1}{2} |x_1(t) \frac{\partial x_2}{\partial t}(t) - x_2(t) \frac{\partial x_1}{\partial t}(t)| \,\mathrm{d}t$$