Rationale Funktionen

0.1 Polynome

Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ sind ein ein Spezialfall der Potenzreihen - insofern ist Ihnen das Vieles in diesem Anschnitt geläufig.

0.1.1 Defintion

Im Folgenden sei K ein Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein *Polynom mit Koeffizienten* mit a_k in K ist ein formaler Ausdruck

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Dieses Polynom kann aber auch durch jeden andern Ausdruck dargestellt werden, der sich durch Anwenden der Körperaxiome, ausgenommen die Existenz Inverser a^{-1}, und Rechnen in K ergibt. Insbesondere ist die Reihenfolge der Summanden und Hinzufügung oder Wegnahme von Summanden $0x^k$ unwesentlich. Die Gesamtheit der Polynome mit Koeffizienten in K wird als $K[x]$ notiert.

0.1.2 Auswertung

Ist $\alpha \in K$, so kann man $p(x)$ an α *auwerten*

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0$$

und erhält somit eine *Polynomfunktion*

$$t \mapsto p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \in K \quad (t \in K)$$

Für $K \subseteq \mathbb{C}$ ist diese beliebig oft differenzierbar und integrierbar.

Um ein Polynom auszuwerten schreibt man es zur Einsparung von Multiplikationen in der folgenden Form (*Hornerschema*)

$$(((\ldots(((a_n x + a_n - 1)x + a_{n-2})x + a_{n-3})\ldots)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

0.1.3 Grad

Ist $a_n \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k > n$ so ist das Polynom vom *Grad* $\deg p(x) = n$ aund a_n der *Leitkoeffizient*. In diesem Falle sind in der obigen Darstellung die Koeffizienten eindeutig bestimmt. $p(x)$ ist hier *normiert*, falls $a_n = 1$.

Das Polynom mit $a_k = 0$ für alle k ist das *Nullpolynom* $\mathbf{0}$ und $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Jedes Polynom $\neq \mathbf{0}$ ist von der Form $cq(x)$ mit $c \neq 0$ und normiertem $q(x)$.

0.1.4 Summe und Produkt

Ist $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ ein weiteres Polynom, so rechnet man

$$p(x) + q(x) = (a_k + b_k)x^k + \ldots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0 \quad k = \max\{n, m\}$$

$$p(x)q(x) = a_n b_m x^{n+m} + \ldots + (a_i b_0 + \ldots + a_0 b_i)x^i + \ldots + a_0 b_0$$

und es gilt

$$\deg p(x) + \deg q(x) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\}, \quad \deg p(x)q(x) = \deg p(x) + \deg q(x)$$

Es gelten die Rechenregeln wie in einem Körper - ausgenommen Division. Aber es gilt die *Kürzungsregel*

$$p(x)q(x) = p(x)r(x) \Rightarrow q(x) = r(x) \quad \text{falls } p(x) \neq \mathbf{0}$$

Diese folgt aus

$$p(x)q(x) = \mathbf{0} \Rightarrow q(x) = \mathbf{0} \quad \text{falls } p(x) \neq \mathbf{0}$$

0.1.5 Polynomdivision

Lemma 0.1 *Sind $p(x)$ und $q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ in $K[x]$ Polynome der Grade $n \geq m$ (also $b_m \neq 0$), so gibt es eindeutig bestimte Polynome $s(x)$ und $r(x)$ von Grad $n-m$ bzw. höchstens $m-1$ so, dass $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$.*

Beweis und Algorithmus. Zur Berechnung geht man wie bei der Division von Dezimalzahlen vor: setze $c_{n-m} = \frac{a_n}{b_m}$ und $r_1(x) = p(x) - c_{n-m}x^{n-m}q(x)$. Dann hat r_1 höchstens Grad $n-1$ und $p(x) = c_{n-m}x^{n-m}q(x) + r_1(x)$. Man setzt nun das Verfahren mit $r_1(x)$ anstelle von $p(x)$ fort und erhält $r_1(x) = c_{n-m-1}x^{n-m-1}q(x) + r_2(x)$ mit $r_2(x)$ von Grad höchstens $n-2$. Schliesslich erhält man $r_{n-m}(x) = c_0 q(x) + r_{n-m+1}(x)$ mit $r(x) = r_{n-m+1}(x)$ von Grad höchstens $m-1$. Fasst man zusammen, so ergibt das $p(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + \ldots + c_0)q(x) + r(x)$. Ist $p(x) = \times s(x)q(x) + \times r(x)$ so folgt $(s(x) - \times s(x))q(x) = \times r(x) - r(x)$ mit $\deg \times r(x) - r(x) < \deg q(x)$, also $\deg s(x) - \times s(x) < 0$ und somit $s(x) - \times s(x) = \mathbf{0} = \times r(x) - r(x)$. □

Korollar 0.2 *Zu $p(x) \in K[x]$ und $a \in K$ gibt es eindeutig bestimmte $r \in K$ und $q(x) \in K[x]$ mit*

$$p(x) = q(x)(x-a)^k + r(x), \ \deg r(x) < k$$

Es folgt $p(a) = r(a)$.

Korollar 0.3 Entwickeln. *Zu $p(x) \in K[x]$ vom Grad n und $\alpha \in K$ gibt es eindeutig bestimmte $d_0, \ldots, d_n$ in K mit*

$$p(x) = d_0 + d_1(x-\alpha) + \ldots d_n(x-\alpha)^n \quad d_0 = p[\alpha], ; d_n \neq 0$$

Beweis durch Induktion über $n \geq \deg p(x)$. Durch Division $p(x) = d_n(x-\alpha)^n + r(x)$ mit $\deg r(x) < n$, also $r(x) = d_0 + d_1(x-\alpha) + \ldots d_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}$ nach Induktion. □

0.1.6 Nullstellen

Ist $\alpha \in K$ und $p(\alpha) = 0$, so heisst α *Nullstelle* von $p(x)$.

Korollar 0.4 Abspaltung. *Ist $p(x) \in K[x]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$ und $\alpha \in K$ eine Nullstelle, so gibt es ein (eindeutig bestimmtes) Polynom $q(x) \in K[x]$ vom Grad $n-1$ so, dass $p(x) = q(x)(x-\alpha)$. Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ so folgt*

$$p'(a) = q(a)$$

Beweis. Division ergibt $p(x) = q(x)(x-\alpha) + \beta$ mit konstantem β. Einsetzen ergibt $0 = p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + \beta = \beta$. Eindeutigkeit nach der Kürzungsregel. Ableiten nach der Produktregel ergibt $p'(x) = q'(x)(x-a) + q(x)$ also $p'(a) = q(a)$. □

$x - \alpha$ heisst der Linearfaktor zur Nullstelle α. Hat man $p(x) = q(x)(x-\alpha)^k$ mit $q(\alpha) \neq 0$ (und das ist eindeutig bestimmt), so ist α eine k-fache Nullstelle von $p(x)$.

Korollar 0.5 *Ein Polynom von Grad $n > 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Korollar 0.6 *Ist K unendlich, so ist ein Polynom schon eindeutig bestimmt durch die zugehörige Polynomfunktion*

$$t \mapsto p(t) \in K \text{ für } t \in K.$$

Bemerkung 0.7 *Jede rationale Nullstelle von $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ ist von der Form rs^{-1} mit ganzen $r|a_0$ und $s|a_n$*

Beweis. Sei $p(\alpha) = 0$. O.B.d.A. $\alpha = rs^{-1}$ mit r, s teilerfremd. Es folgt $a_n r^n s^{-n} = -\sum_{i<n} a_i r^i s^{-i}$ also $a_n r^n s^{-1} \in \mathbb{Z}$. Also $s|(a_n r^n)$ und wegen $\mathrm{GGT}(s, r^n) = \mathrm{GGT}(s, r) = 1$ dann $s|a_n$. Andererseits ist r Nullstelle von $s^n p(x)$, also Teiler von $-s^n a_0 = \sum_{i=1}^{n} s^n a_i r^i$ und damit von a_0.

Lemma 0.8

$$g(x) = q(x)(x-a)^k \ \Rightarrow q(a) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(a)$$

Beweis. Wir zeigen durch Induktion

$$g^{(l)}(x) = q_l(x)(x-a)^{k-l+1} + k \cdots (k-l+1) \cdot q(x)(x-a)^{k-l}$$

mit passenden $q_l(x)$. Ableiten ergibt

$$g^{(l+1)}(x) = q_l'(x)(x-a)^{k-l+1} + q_l(x)(k-l+1)(x-a)^{k-l} + k \cdots (k-l+1) \cdot q'(x)(x-a)^{k-l} +$$

$$+ k \cdots (k-l+1) \cdot (k-l) q(x)(x-a)^{k-l-1} \square$$

Also

$$g^{(k)}(x) = q_k(x)(x-a) + k! q(x)$$

und die Behauptung folgt durch Einsetzen von a. □

0.1.7 Euklidischer Algorithmus

Wir definieren nun die Teilbarkeit in $K[x]$ analog zu der in $\mathbb{Z}$

$$p(x) \text{ teilt } q(x) \;\Leftrightarrow\; \exists r(x). \quad q(x) = p(x)r(x)$$

$p(x)$ und $q(x)$ sind *teilerfremd*, wenn ihre einzigen gemeinsamen Teiler Kostanten sind,

Satz 0.9 *(*Bezout*) Zu teilerfremden $p(x), q(x) \in K[x]$ gibt es $r(x), s(x) \in K[x]$ mit*

$$1 = p(x)r(x) + q(x)s(x) \quad \deg r(x) < \deg q(x), \quad \deg s(x) < \deg p(x)$$

Diese bestimmt man mit dem Euklidischen Algorithmus für Polynome.

Beweis exemplarisch in $\mathbb{Z}$. Die beiden Startzeilen sind trivial. Dann zieht man immer ein Vielfaches der letzten aktuelle Zeile von der vorletzten ab (Division mit Rest der Einträge in der ersten Spalte). Dabei entsteht wieder eine gültige Relation.

$$\begin{array}{rcllcl}
98 & = & 1 \cdot 98 & + & 0 \cdot 27 \\
27 & = & 0 \cdot 98 & + & 1 \cdot 27 \\
17 & = & 1 \cdot 98 & + & -3 \cdot 27 \\
10 & = & -1 \cdot 98 & + & 4 \cdot 27 \\
7 & = & 2 \cdot 98 & + & -7 \cdot 27 \\
3 & = & -3 \cdot 98 & + & 11 \cdot 27 \\
1 & = & 8 \cdot 98 & + & -29 \cdot 27
\end{array}$$

0.1.8 Faktorzerlegung

Ein nicht konstantes Polynom $p(x)$ heisst *unzerlegbar* oder *irreduzibel*, wenn in jeder Zerlegung $p(x) = q(x)r(x)$ einer der Faktoren konstant ist. Diese spielen die Rolle der Primzahlen. Man bemerkt, dass *ein irreduzibles $p(x)$ ein Produkt $q(x)r(x)$ nur dann teilt, wenn es mindestens einen der Faktoren teilt*: sonst sind z.B. $p(x)$ und $q(x)$ teilerfremd, also gibt es $a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1$ und $p(x)$ teilt $r(x) = a(x)p(x)r(x) + b(x)q(x)r(x)$. Wie für $\mathbb{Z}$ beweist man

Satz 0.10 *Jedes nichtkonstante Polynom $p(x) \in K[x]$ hat eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Darstellung mit normierten irreduziblen $p_i(x) \in K[x]$ und $a \in K$*

$$p(x) = ap_1(x) \cdots p_n(x)$$

Beweis: Die Existenz folgt durch Ordnungsinduktion über den Grad: Ist $p(x)$ nicht schon irreduzibel, so $p(x) = q(x)r(x)$ mit Polynomen kleineren Grades, also $q(x) = bq_1(x) \cdots q_k(x)$ und $r(x) = cr_1(x) \cdots r_l(x)$ und somit $p(x) = bcqq_1(x) \cdots q_k(x) \cdot r_1(x) \cdots r_l(x)$.

Die Eindeutigkeit folgt nun durch Induktion über die Anzahl der Faktoren: Ist

$$p(x) = ap_1(x) \cdots p_n(x) = bq_1(x) \cdots q_m(x)$$

so $a = b$ da die $p_i(x)$ und $q_i(x)$ alle normiert sind. Auch teilt $p_1(x)$ eines der $q_i(x)$, nach Umnummerierung also $q_1(x)$ und wegen Normiertheit folgt $p_1(x) = q_1(x)$. Nun kürzt man $p_1(x)$ und beruft sich auf die Induktionsannahme. $\Box$.

0.1.9 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 0.11 *Die einzigen normierten irreduziblen Polynome in* $\mathbb{C}[x]$ *sind die linearen* $x-\alpha$.

Beweis. Es sei
$$\mu := \inf\{|w| \mid w = p(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{C}\}.$$
Dieses Infimum wird auch angenommen, d.h. es gibt ein $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha_0) = \mu$ (Begründung in Stichworten: Man sieht leicht, dass $|p(\alpha)| \to \infty$ für $|\alpha| \to \infty$. Daher ist μ ein Grenzwert von der Form $\mu = \lim_{\alpha \to \alpha_0} |p(\alpha)|$ und die Behauptung folgt aus der Stetigkeit von p). Wir haben die Annahme $\mu > 0$ auf einen Widerspruch zu führen. Durch Entwickeln

$$p(x) = p(\alpha_0) + d_1(x-\alpha_0) + d_2(x-\alpha_0)^2 + \cdots + d_n(x-\alpha_0)^n.$$

Sei $k \leq n$ der kleinste Index mit $d_k \neq 0$. Ein solches k existiert, denn sonst wäre $p(x)$ konstant. Setzt man
$$d := d_k \text{ und } R(y) := d_{k+1}y^{k+1} + \cdots + d_n y^n$$
so hat man
$$p(\alpha) = p(\alpha_0) + d\epsilon^k + R(\epsilon) \qquad \text{für alle } \alpha = \alpha_0 + \epsilon \in \mathbb{C}$$
Wir möchten $\epsilon \in \mathbb{C}$ so wählen, dass $d\epsilon^k$ die zu $p(\alpha_0)$ entgegengesetzte Richtung hat. Genauer gesagt schreiben wir $p(\alpha_0) = r(\cos\omega_0 + i\sin\omega_0)$ in Polarkoordinaten. Dann soll $d\epsilon^k$ ein positives reelles Vielfaches von $\cos(\pi+\omega_0) + i\sin(\pi+\omega_0)$ sein (siehe Zeichnung). Die komplexe Zahl $d \neq 0$ ist fest und lautet in Polarkoordinaten $d = s(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1)$. Schreibt man auch ϵ als $\epsilon = t(\cos\omega_2 + i\sin\omega_2)$, so

$$d\epsilon^k = st^k(\cos(\omega_1 + k\omega_2) + i\sin(\omega_1 + k\omega_2)),$$

und man sieht, dass man mit $\omega_2 := (\pi + \omega_0 - \omega_1)k^{-1}$ passende ϵ erhält - für jedes $t > 0$. Weil entweder $R(y)$ das Nullpolynom ist, oder ein Polynom in y mit allen Exponenten $> k$, gilt

$$\frac{|R(t(\cos\omega_2 + i\sin\omega_2))|}{|d(t(\cos\omega_2 + i\sin\omega_2))^k|} \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0.$$

Es gibt also eine reelle Zahl $t_0 > 0$, derart dass für $\epsilon_0 := t_0(\cos\omega_2 + i\sin\omega_2)$ gilt $|R(\epsilon_0)| \leq |d\epsilon_0^k|/2$. Aus der Skizze ist klar, dass für $\alpha := \alpha_0 + \epsilon_0$ gilt $|p(\alpha)| < |p(\alpha_0)| = \mu$. Dies ist der gewünschte Widerspruch.

$p(\alpha_0) + d\epsilon_0^k + R(\epsilon_0)$
$= p(\alpha)$

i

$p(\alpha_0)$

$R(\epsilon_0)$

ω_0

-1 0 1

$d\epsilon_0^k$

$\square$

0.1.10 Reelle Faktorisierung

Die imaginäre Einheit ist in Folgenden als j. die konjugiert-komplexe Zahl als α^* notiert.

Satz 0.12 *Ist $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, so ist eine komplexe Zahl α Nullstelle von $p(x)$ genau dann, wenn auch ihre Konjugierte $\overline{\alpha}$ Nullstelle von $p(x)$ ist; man hat eine Zerlegung*

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)^{n_1} \ldots (x-\alpha_l)^{n_l} q_{l+1}(x)^{n_{l+1}} \ldots q_m(x)^{n_m}$$

in lineare und quadratische reelle Polynome, die den reellen Nullstellen bzw. den Paaren konjugiert komplexer Nullstellen entsprechen. Dabei ist das Polynom zu $\alpha = a + bj$ und $\overline{\alpha} = a - bj$ das folgende

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = (x-(a+bj))(x-(a-bj)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich sofort daraus, dass die Konjugation mit Addition und Multiplikation verträglich ist und reelle Zahlen festlässt. Dann fasst man im Fundamentalsatz die Paare konjugierter zusammen. □

0.2 Rationale Funktionen

0.2.1 Körper der rationalen Funktionen

Wie von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ kann man vom Polynomring $K[x]$ zum *Körper $K(x)$ der rationalen Funktionen* übergehen. Man betrachte Quotienten, d.h. Paare

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit } q(x) \neq \mathbf{0}$$

und setzt zwei solche Quotienten gleich

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{s(x)} \quad \Leftrightarrow \; p(x)s(x) = q(x)r(x)$$

Adddition und Multiplaktion sind wie gewohnt definiert

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)s(x) + q(x)r(x)}{q(x)s(x)}, \quad \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}$$

Für $K \subseteq \mathbb{C}$ können wir natürlich auch die Funktion

$$t \mapsto \frac{p(t)}{q(t)} \quad t \in K, \;\; q(t) \neq 0$$

betrachten und mit dem Quotienten identifizieren. Diese Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar und integrierbar.

0.2.2 Partialbruchzerlegung

Lemma 0.13 *Seien $f(x), g(x) \in K[x]$ gegeben und a k-fache Nullstelle von $g(x)$*

$$g(x) = q(x)(x-a)^k, \quad q(a) \neq 0$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte $A \in K$ und $h(x) \in K[x]$ so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{h(x)}{q(x)(x-a)^{k-1}}$$

nämlich

$$A = \frac{f(a)}{q(a)} = \frac{k! f(a)}{g^{(k)}(a)} \text{ und } f(x) - Aq(x) = h(x)(x-a)$$

wobei $h(x)$ durch Polynomdivision bestimmt werden kann.

Beweis: Ist A wie angegeben, so $f(a) - Aq(a) = 0$, also $f(x) - Aq(x)$ durch $x - a$ teilbar. Es folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Aq(x)}{q(x)(x-a)^k} + \frac{h(x)}{q(x)(x-a)^{k-1}}$$

Umgekehrt folgt durch Multiplikation mit $g(x)$

$$f(x) = Aq(x) + h(x)(x-a)$$

und durch Einsetzen von a für x dass $f(a) = Aq(a)$. Damit ist $A = \frac{f(a)}{q(a)}$ eindeutig bestimmt - beachte $q(a) \neq 0$. Also $f(x) - Aq(x) = h(x)(x-a)$ und die die Eindeutigkeit von $h(x)$ folgt aus der Kürzungsregel. □

Satz 0.14 *Zu Polynomen $f(x), g(x) \in K[x]$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, mit $g(x) = \prod_{i=1}^n p_i(x)^{k_i}$ mit irreduziblen normierten $p_i(x)$ gibt es eine Darstellung*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = r(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{k_i} \frac{r_{ik}(x)}{p_i(x)^k} \quad \text{mit } \deg r_{ik}(x) < \deg p_i(x)$$

Dabei ist $r(x) = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\deg g(x) < \deg f(x)$. Die Darstellung ist eindeutig. Über $\mathbb{C}$ gilt $\deg p_i(x) = 1$. Über $\mathbb{R}$ hat man $\deg p_i(x) = 1$ bzw. Paare konjugierter komplexer Partialbrüche

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{A^*}{(x-\alpha^*)^k} = \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}$$

$$c = -(\alpha+\alpha^*), \; d = \alpha\alpha^*, a = A + A^*, b = -(A\alpha^* + A^*\alpha) \in \mathbb{R}$$

Beweis. Über $\mathbb{C}$ mit dem Lemma und Induktion über $\deg g(x)$ - und Berufung auf den Fundamentalsatz. Möchte man die Partialbruchzerlegung reeller rationaler Funktionen über $\mathbb{R}$ bestimmen, so ist mit jeder komplexen Nullstelle α von $g(x)$ auch die konjugierte α^* eine Nullstelle - weil $(a+b)^* = a^* + b^*$ und $(ab)^* = a^* b^*$. Also kann man die Behauptung auf den komplexen Fall zurückführen. □

Korollar 0.15 *Ist $g(x) = c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ mit lauter verschiedenen a_k und $\deg f(x) < \deg g(x)$ so gilt*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a_1)}{g'(a_1)} \cdot \frac{1}{x-a_1} + \ldots + \frac{f(a_n)}{g'(a_n)} \cdot \frac{1}{x-a_n}$$

0.2.3 Mehrfache Nullstellen

Lemma 0.16 *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ und $f(x), g(x) \in K[x]$ gegeben und $g(x) = q(x)(x-a)^k$, $q(a) \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $A, B \in K$ und $r(x) \in K[x]$ so dass*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{B}{(x-a)^{k-1}} + \frac{r(x)}{q(x)(x-a)^{k-2}}$$

Nämlich

$$A = \frac{f(a)}{q(a)}, \quad B = \frac{f'(a) - Aq'(a)}{q(a)}$$

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit vin A, B und $r(x)$. nach dem Satz über Partialbruchzerlegung. Durch Multiplikation mit $g(x)$ folgt

$$f(x) = Aq(x) + Bq(x)(x-a) + r(x)(x-a)^2$$

durch Differenzieren

$$f'(x) = Aq'(x) + Bq(x) + Bq'(x)(x-a) + (r'(x) + 2(x-a))(x-a)$$

und durch Einsetzen von a

$$f'(a) = Aq'(a) + Bq(a) \quad \square$$

Damit kann man die Partialbrüche zu doppelten Nullstellen bestimmen.

0.2.4 Quadratische Faktoren

Lemma 0.17 *Seien $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ und $x^2 + cx + d$ ein irreduzibler Faktor von $g(x)$ der Vielfachheit k*

$$g(x) = q(x)(x^2 + cx + d)^k, \quad x^2 + cx + d \text{ kein Teiler von } q(x)$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte $A, B \in \mathbb{R}$ und $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$(*) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + cx + d)^k} + \frac{h(x)}{q(x)(x^2 + cx + d)^{k-1}}$$

Dabei sind A, B die eindeutig bestimmten Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$rA = \mu, \quad sA + rB - a = \mu c, \quad sB - b = \mu d$$

wobei $ax + b$ bzw. $rx + s$ die Reste von $f(x)$ bzw. $q(x)$ bei Division durch $x^2 + cx + d$ sind.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit wurde schon im Satz über die Partialbruchzerlegung bewiesen. Seien nun α, α^* die komplexen Nullstellen von $x^2 + cx + d$ also

$$x^2 + cx + d = (x - \alpha)(x - \alpha^*)$$

Ist $f(x) = m(x)(x^2+cx+d)+ax+b$ so folgt $f(\alpha) = a\alpha+b$ und $f(\alpha^*) = a\alpha^*+b$. Ebenso $q(\alpha) = r\alpha + s$ und $q(\alpha^*) = r\alpha^* + s$. Multipliziert man (*) mit $(x^2+cx+d)^k$ so folgt

$$\frac{f(x)}{q(x)} = Ax + B + \frac{h(x)}{q(x)}(x^2+cx+d)$$

und durch Einsetzen von α und α^*

$$\frac{a\alpha+b}{r\alpha+s} = A\alpha + B, \;\; \frac{a\alpha^*+b}{r\alpha^*+s} = A\alpha + B$$

Also sind $\alpha \neq \alpha^*$ die Nullstellen des quadratischen Polynoms

$$(Ax+B)(rx+s) - (ax+b)$$

und dieses somit von der Form $\mu(x^2+cx+d)$ mit eindeutig bestimmtem $\mu \in \mathbb{R}$. Also

$$rAx^2 + (sA + rB - a)x + sB - b = \mu x^2 + \mu cx + \mu d$$

und die Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich. $\Box$.

0.2.5 Beispiele

Beispiel.

$$f(x) = x^2, \; g(x) = (x-1)^2(x^2+1) = (x-1)^2(x-j)(x+j)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-j} + \frac{D}{x+j}$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Ax+B}{x^2+1}$$

Für $a = 1$: $q(x) = x^2+1$, $q'(x) = 2x, \; f'(x) = 2x$

$$A_2 = \frac{f(a)}{q(a)} = \frac{1}{2}, \;\; A_1 = \frac{f'(a) - A_2 q'(a)}{q(a)} = \frac{2 - \frac{1}{2}2}{2} = \frac{1}{2}$$

Die Reste von x^2 bzw. $(x-1)^2$ bei Division durch x^2+1 sind -1 bzw. $-2x$ also

$$(Ax+b)(-2x) + 1 = \mu x^2 + \mu$$

und es folgt

$$\mu - 1, \; B = 0, \; A = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$

Komplexe Rechnung: Für $a = j$: $q(x) = (x-1)^2(x+j)$

$$C = \frac{f(a)}{q(a)} = \frac{-1}{(j-1)^2 2j} = \frac{-1}{-2j2j} = \frac{-1}{4}$$

Da $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ folgt
$$D = C^* = -\frac{1}{4}$$
Nun
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-j} + \frac{1}{x+j}\right) = -\frac{1}{4}\frac{x+j+x-j}{(x-j)(x+j)} = \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$
Also
$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-j} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+j}$$

Beispiel.
$$\frac{x^3+x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Ax+B}{x^2+x+1}$$
$a = 1,\ q(x) = x^2+x+1,\ f'(x) = 3x+1, q'(x) = 2x+1$
$$A_2 = \frac{f(a)}{q(a)}\frac{2}{3},\quad A_1 = \frac{f'(a) - A_2 q'(a)}{q(a)} = \frac{1}{3}(4 - \frac{2}{3}3) = \frac{2}{3}$$
$x^2 + cx + d = x^2 + x + 1$. Reste von $x^3 - x$ bzw. $q(x) = (x-1)^2$ sind
$$x+1,\quad -3x$$
Es folgt
$$(Ax+B)(-3x) - (x+1) = -3Ax^2 + (-3B-1)x - 1 = \mu x^2 + \mu x + \mu$$
$$-3A = \mu,\ (-3B-1) = \mu, \mu = 1$$
$$A = \frac{1}{3},\ B = 0$$
Mühsamer ist die komplexe Rechnung. $x^2 + cx + d$ hat Nullstellen
$$\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\quad \zeta^* = \zeta^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
Es gilt $\zeta^3 = 1$. Die Partialbrüche
$$\frac{C}{x-\zeta},\quad \frac{C^*}{x-\zeta^*}$$
bestimmen wir mit
$$C = \frac{f}{\zeta}(\zeta-1)^2(\zeta-\zeta^2) = \frac{\zeta}{(\zeta-1)^3} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\zeta j = \frac{1}{6} + \frac{1}{6\sqrt{3}}j$$
da
$$(\zeta-1)^3 = \zeta^3 - 3\zeta^2 + 3\zeta - 1 = 3(\zeta - \zeta^*) = 3\sqrt{3}j$$
Es folgt
$$A = C + C^* = \operatorname{Re} C = \frac{1}{3}$$
$$B = C\zeta^* + C^*\zeta = \frac{-j}{3\sqrt{3}}\zeta\zeta^2 + \frac{j}{3\sqrt{3}}\zeta\zeta^2 = 0$$

0.2.6 Partialbruchzerlegung über beliebigen Körpern

Wir wollen rationale Funktionen in einfacherer Weise darstellen. Dazu die folgenden drei Reduktionsschritte

- Ausdividieren $f(x) = q(x)g(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \qquad \deg r(x) < \deg g(x)$$

- Bezout $a(x)h(x) + b(x)g(x) = 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{f(x)a(x)}{g(x)} + \frac{f(x)b(x)}{h(x)} \quad \text{für teilerfremde } g(x),\ h(x)$$

- Zerlegen $f(x) = q(x)g(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)^n} = \frac{r(x)}{g(x)^n} + \frac{q(x)}{g(x)^{n-1}}, \qquad \deg r(x) < \deg g(x)$$

Dann gilt der Satz über Partialburchzerlegung wie oben formuliert.

Beweis. Existenz. Wir führen exemplarisch eine Partialbruchzerlegung von $\frac{73}{60}$ in $\mathbb{Q}$ aus, indem wir folgende Schritte anwenden

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad \text{mit } a = qr + b \ \ 0 \le r < b$$

$$\frac{c}{ab} = \frac{sc}{a} + \frac{rc}{b} \quad \text{mit } ra + sb = 1 \text{ für teilerfremde } a, b$$

$$\frac{a}{p^k} = \frac{q}{p^{k-1}} + \frac{r}{p^k} \quad \text{mit } a = qp + r,\ 0 \le r < p$$

Lösung

$$\frac{71}{60} = 1 + \frac{11}{60}$$

$$60 = 5 \cdot 12,\ \ 1 = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12,\ \ \frac{11}{60} = \frac{55}{12} - \frac{22}{5} = \frac{7}{12} - \frac{2}{5}$$

$$12 = 3 \cdot 4,\ \ 1 = 4 - 3,\ \ \frac{7}{12} = \frac{28}{12} - \frac{21}{12} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1,\ \ \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{71}{60} = 1 + \frac{11}{60} = 1 + \frac{7}{12} - \frac{2}{5} = 2 - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

Hat man eine Partialbruchzerlegung wie im Satz, bringt man die Partialbrüche auf den Hauptnenner $g(x)$ und addiert sie auf, so erhält man im Zähler einen Grad $< \deg g(x)$. Damit ist $r(x)$ das Ergebnis bei der Division mit Rest und eindeutig bestimmt.

Zum weiteren Beweis der Eindeutigkeit dürfen wir also $r(x) = 0$ annehmen. Seien also zwei Zerlegungen gegeben

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{r_{ik}(x)}{p_i(x)^k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{s_{ik}(x)}{p_i(x)^k} \quad \text{mit } \deg r_{ik}(x),\, \deg s_{ik}(x) < \deg p_i(x)$$

Sei k maximal so, dass für ein i $r_{ik}(x) \neq s_{ik}(x)$. Indem man in der Gleichung alle gleichen Terme streicht und dann mit dem Hauptnenner $N(x)$ multipliziert, erhält man in jedem Summanden einen Faktor $p_i(x)$ in Zähler, ausser in

$$\frac{r_{ik}(x)N(x)}{p_i(x)^k} \text{ und } \frac{s_{ik}(x)N(x)}{p_i(x)^k}$$

Also ist $p_i(x)$ Teiler von $h(x)(r_{ik}(x) - s_{ik}(x))$ wobei

$$h(x) = \frac{N(x)}{p_i(x)^k}$$

nach Wahl von k zu $p_i(x)$ teilerfremd ist. Also ist $p(x)$ Teiler von $r_{ik}(x) - s_{ik}(x)$, Da $\deg(r_{ik}(x) - s_{ik}(x) < \deg p_i(x)$ folgt $r_{ik}(x) - s_{ik}(x) = \mathbf{0}$. $\Box$

Für teilerfremde Polynome erhält man

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right)$$

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+cx+d)} = \frac{1}{a^2+ab+c}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{x+a+c}{x^2+cx+d}\right)$$

$$\frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{q(x)+1}{r\cdot f(x)} - \frac{q(x)}{r\cdot g(x)}, \quad \text{mit } f(x) = x^2+ax+b,\ g(x) = x^2+cx+d$$

$$q(x) = \frac{x}{a-c} + \frac{1}{a-c}\left(c - \frac{b-d}{a-c}\right),\ r = d - \frac{b-d}{a-c}\left(c - \frac{b-d}{a-c}\right)$$

Beispiel

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = -\frac{x-2}{3(x-1)^2} + \frac{x+1}{3(x^2+x+1)} \quad \text{mit } q(x) = \frac{-1}{3}(x+1),\ r = 1$$

$$= \frac{-1}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{x+1}{3(x^2+x+1)}$$

0.2.7 Höhere Vielfachheiten

Statt des euklidischen Algorithmus kann man auch einen Ansatz benutzen, um für $g(x) = q(x)p(x)^k$, $p(x)$ teilerfremd zu $q(x)$ ein $r(x)$ mit $\deg r(x) < k \deg p(x)$ so zu bestimmen, dass

$$\frac{f(x}{g(x)} = \frac{r(x)}{p(x)^k} + \frac{h(x)}{q(x)}$$

Nämlich

$$f(x) = r(x)q(x) + h(x)p(x)^k$$

also $p(x)^k$ Teiler von $r(x)q(x) - f(x)$. Geht man zu den Resten $\tilde{f}(x)$ bzw. $\tilde{(q)}(x)$ von $f(x)$ bzw. $q(x)$ bei Division durch $p(x)^k$ über, so gilt

$$r(x)\tilde{q}(x) - \tilde{f}(x) = s(x)p(x)^k$$

mit einem $s(x)$ von $\deg s(x) < k \deg p(x)$. Koeffizientenvergleich liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von $r(x)$ und $s(x)$.

Die Partialbrüche zu den Potenzen von $p(x)$ erhält man dann durch

- Fortlaufende Division mit Rest durch $p(x)$ beginnend mit $r(x)$
- (Taylor)Entwicklung an a falls $q(x) = x - a$

Für $K \subseteq \mathbb{C}$ und $p(x) = x - a$ kann man die Partialbrüche auch mittels Differentiation bestimmen. Aus

$$f(x) = A_k + A_{k-1}p(x) + A_2 p(x)^{k-2} + A_1 p(x)^{k-1} + h(x)p(x)^k$$

folgt

$$(A_{k-m}q(x)p(x)^{k-m})^{(m)} = f^{(m)}(x) - \sum_{l=k-m+1}^{k} (A_l q(x)p(x)^{k-l})^{(m)} + t_m(x)p(x)$$

mit

$$t_m(x)p(x) = \frac{\partial^m}{\partial x^m}(\sum_{l=1}^{k-m-1} A_l q(x)p(x)^{k-l} + h(x)p(x)^k)$$

Durch Berechnung der Ableitungen und Einsetzen von a kann man so $A_k, \ldots, A_1$ bestimmen.