

Einführung in die Optimierung

14. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
17./18.02.2010

Gruppenübung

Dieses Übungsblatt dient zur Wiederholung des Stoffes, ihr könnt es als eine Art Probeklausur ansehen. Aufgaben könnten so oder ähnlich in der Klausur vorkommen. Allerdings geben wir keine Garantie auf Vollständigkeit: Themengebiete die hier nicht aufgegriffen wurden können natürlich trotzdem in der Klausur vorkommen!

Aufgabe G34 (Komplementarität)

Gegeben sei folgendes LP

$$\begin{array}{rll}
 \min & -7x_1 & - 6x_2 & - 5x_3 & + 2x_4 & - 2x_5 \\
 \text{s.t.} & x_1 & + 3x_2 & + 5x_3 & - 2x_4 & + 2x_5 & \leq 4 \\
 & 4x_1 & + 2x_2 & - 2x_3 & + x_4 & + x_5 & \leq 3 \\
 & 2x_1 & + 4x_2 & + 4x_3 & - 2x_4 & + 5x_5 & \leq 5 \\
 & 3x_1 & + x_2 & + 2x_3 & - x_4 & - 2x_5 & \leq 1 \\
 & & & & & & x_1, \dots, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

- Prüfen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung des LPs ist. Geben Sie Ihre Rechenschritte an.
- Geben Sie ein Beispiel für $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ an, so dass x^* optimal für das obige LP mit der abgeänderten Zielfunktion $\min(c_1, -6, -5, 2, c_2)^T x$ ist.
- Ist x^* optimal für obiges LP mit der abgeänderten Zielfunktion $\min(-1, -3, -5, 2, -2)^T x$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe G35 (Lineare Programme)

Gegeben sei folgendes lineare Programm:

$$\begin{array}{rll}
 \min & -3x_1 & - 2x_2 & - 2x_3 \\
 \text{s.t.} & x_1 & & + x_3 & \leq 8 \\
 (P) & x_1 & + x_2 & & \leq 7 \\
 & x_1 & + 2x_2 & & \leq 12 \\
 & & & & x_1, \dots, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Führe eine Iteration des Simplex-Verfahrens durch.

Aufgabe G36 (Konvexität)

Betrachte die Menge $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

Zeige: $P(A, b)$ ist konvex, d.h. mit $x^1, \dots, x^k \in P(A, b)$ ist für $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$ auch $y \in P(A, b)$.

Aufgabe G37 (Ganzzahligkeit)

Betrachte das ganzzahlige Programm

$$\begin{array}{rll}
 \max & & x_2 \\
 \text{s.t.} & -3x_1 & + 4x_2 & \leq 4 \\
 (IP) & 3x_1 & + 2x_2 & \leq 11 \\
 & 2x_1 & - x_2 & \leq 5 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0 \\
 & & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Zeichne ein Bild, um die folgende Frage zu beantworten:

Was ist der Optimalwert der linearen Relaxierung? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems? Was ist die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems ?

Aufgabe G38 (Nichtlineare Probleme)

Betrachte das nichtlineare Programm

$$(NP) \quad \begin{array}{ll} \max & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ist es möglich, dass der Punkt $x = (1, 0)$ ein lokaler Maximalpunkt von (NP) ist?

Aufgabe G39 (Modellierung)

Produktionsplanung für Strumpfhosen

Die Strickstrumpf KG stellt Socken, Kniestrümpfe und Strumpfhosen aller Art her. Neu ins Programm aufgenommen werden demnächst zwei Arten von Baumwollstrumpfhosen, die auf einer zu diesem Zweck angeschafften Spezialmaschine mit einer Kapazität von 10200 Minuten pro Monat produziert werden soll. Modell „Luxus“ verbraucht davon pro Stück 12 Minuten, Modell „Jedermann“ lediglich 6 Minuten. Die zur Herstellung beider Strumpfhosen benötigte Baumwolle ist auf Röllchen zu je 100 g gewickelt, von denen pro Monat 3600 Stück zur Verfügung stehen. Diese Menge vermindert sich durch die Produktion von „Luxus“ um 4 Röllchen und durch „Jedermann“ um 3 Röllchen je Stück. Eine Verpackungsmaschine der Unternehmung kann für 2700 Minuten freigestellt werden und wird von einer Strumpfhose „Jedermann“ 3 Minuten in Anspruch genommen. Die Luxusausführung kommt dagegen mit 2/3 der Zeit aus. Da die Herstellungskosten von „Luxus“ mit 8,- Euro pro Strumpfhose doppelt so hoch sind wie von „Jedermann“, möchte die Strickstrumpf KG das Modell „Luxus“ zu einem Preis von 18,- Euro pro Stück und das Modell „Jedermann“ zu 10,- Euro pro Stück anbieten.

Stelle ein Lineares Programm auf, welches eine Gewinnmaximierung der Strickstrumpf KG modelliert.

Aufgabe G40 (Verständnisfragen)

- Gib zwei Gründe an, warum die Simplexmethode besser ist als gnadenloses ausprobieren.
- Sei (P) ein lineares Optimierungsproblem mit endlicher Optimallösung. Was weiß man dann über Zulässigkeit und Optimalwert des dualen Problems (D) und warum? (Stichwort genügt)
- Stimmt es, dass in einem paar zueinander dualer LPs wenigstens eines eine zulässige Lösung besitzt? (Gib eine kurze Begründung deiner Antwort!)
- Dem neuen Vorstandsvorsitzenden der Deutsche Bahn AG hat ein Unternehmensberater erzählt, dass es effiziente Algorithmen zum Lösen von LPs gibt, mit denen sich schneller neue Fahrpläne berechnen ließen. Deshalb will er, dass Du eine Task Force leitest, die das mit der Ellipsoidmethode angehen soll. Nenne einen Vorteil und einen Nachteil dieser Methode und sprich eine Empfehlung für die weitere Vorgehensweise aus!
- Wahr oder falsch: Wenn es eine Methode gibt, die einen zulässigen Punkt eines Ungleichungssystems findet, so kann diese direkt zur Lösung von LPs benutzt werden. (Kurze Begründung!)
- Wahr oder falsch: Die Anzahl der Optimallösungen eines linearen Programms ist immer endlich. (Kurze Begründung!)
- Wahr oder falsch: Die Anzahl der Basislösungen eines linearen Programms ist immer endlich. (Kurze Begründung!)
- Warum kann man mit der Simplex-Methode keine nichtlinearen Programme lösen?

Wir bedanken uns für die gute Zusammenarbeit im letzten Semester und wünschen weiterhin ein erfolgreiches Studium!