Einführung in die Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
03./04.02.2011

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Tangentialkegel)
Sei

$$\begin{aligned}\mathscr{X} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid & -2x + y - 1 \leq 0,\\ & -2x - y - 1 \leq 0,\\ & x + y - 1 \leq 0\\ & x - y - 1 \leq 0\}.\end{aligned}$$

(a) Skizziere die Menge $\mathscr{X}$.

(b) Bestimme die Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in den Punkten $p_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_3 = (0,0)$ und zeichne die Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in p_1 und p_2 in die Skizze ein.

(c) Bestimme anhand der Skizze alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathscr{X} \to \mathbf{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe G29 (Notwendige Optimalitätsbedingungen)
Formuliere analog zum Satz 7.2 aus der Vorlesung die notwendige Optimalitätsbedingung für den Fall, dass

(a) es sich um ein Maximierungsproblem handelt,

(b) die lokale Lösung $\bar{x}$ ein innerer Punkt von $\mathscr{X}$ ist.

Aufgabe G30 (Lokale Minima)
Betrachte das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathscr{X}} \quad f(x)$$

mit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f \in C^2$. Überprüfe jeweils, ob der Punkt x^*
(i) sicher kein lokaler Minimalpunkt ist,
(ii) eventuell ein lokaler Minimalpunkt sein könnte.

(a) $\mathscr{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,1)^T$.

(b) $\mathscr{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 2\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,0)^T$.

(c) $\mathscr{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (0,0)^T$.

Hausübung

Aufgabe H37 (KKT-Bedingungen) (5 Punkte)
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$(P1)\quad \begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2 & \rightarrow & \max \\ x_1+x_2 & \leq & 8 \\ -x_1+2x_2 & \leq & 4 \\ x_1,x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Formuliere die KKT-Bedingungen für (P1). Verifiziere für jeden Eckpunkt (algebraisch und geometrisch), ob die KKT-Bedingungen gelten. Was ist die globale Lösung?

Aufgabe H38 (Tangentialkegel) (4 Punkte)
Seien $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2 \subset R^n$ abgeschlossen. Beweise oder widerlege:

(a) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{Z}_1$ und $\mathscr{Z}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{Z}_1 \cap \mathscr{Z}_2$.

(b) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{Z}_1$ und $\mathscr{Z}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{Z}_1 \cup \mathscr{Z}_2$. (Für den Fall, dass $x \notin \mathscr{X}$ gilt, sei der Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in x als die leere Menge definiert.)

Aufgabe H39 (Slater-Bedingung) (4 Punkte)
Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem

$$\min f(x) \ \text{ s.t. } \ c(x) \leq 0,$$

mit konvexen, zumindest einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die sogenannte Slater-Bedingung lautet: Es gibt einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, mit $c(y) < 0$.
Zeige, dass aus der Slater-Bedingung die Constraint Qualification folgt, d.h. für alle $x \in \mathscr{X}$ gilt $\mathscr{Z}(x) = \mathscr{L}_{\mathscr{X}}(x)$.