Einführung in die Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
27./28.01.2011

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Größe der Ecken von Polyedern)
Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^4 | Ax \le b, x \ge 0\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | Bx \le d, x \ge 0\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine beliebige Ecke von P und sei $v_i, 1 \le i \le 4$, eine beliebige Koordinate von v. Gib obere Schranken für den Absolutbetrag des Zählers von v_i, für den Absolutbetrag des Nenners von v_i und für $|v_i|$ an. Löse dieselbe Aufgabe für eine beliebige Ecke $q = (q_1, q_2, q_3)$ von Q. Kann man diese Schranken verbessern?

Aufgabe G27 (Die Ellipsoidmethode)

(a) Betrachte das Polyeder $\mathscr{P} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \le b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt die Ellipsoidmethode höchstens, um zu entscheiden, ob $\mathscr{P}^0$ leer ist oder nicht?

(b) In der ersten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_1 = (0,0)^T$ und $A_1 = 2I$ gegeben. Sei $x + y \le -1$ eine der verletzten Ungleichungen. Bestimme a_2 und A_2 und stelle die Ellipsoide $\mathscr{E}_1$ und $\mathscr{E}_2$ sowie die Geraden $g := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = -1\}$ und $g_t := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$ graphisch dar.

Hausübung

Aufgabe H34 (Kodierungslänge eines Rucksackproblems) (3 Punkte)
Das Rucksackproblem ist ein Optimierungsproblem der Kombinatorik. Aus einer Menge von Objekten, die jeweils ein Gewicht und einen Nutzwert haben, soll eine Teilmenge ausgewählt werden, deren Gesamtgewicht eine vorgegebene Gewichtsschranke nicht überschreitet. Unter dieser Bedingung soll der Nutzwert der ausgewählten Objekte maximiert werden.
Mathematische Formulierung lautet:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^n c_i x_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n a_i x_i & \le \quad b \quad , \\ & x_i \in \{0, 1\} & \forall i \end{array}$$

dabei sind a_i die positive Gewichten, c_i die positive Werten und b eine Schranke für das maximale Gewicht, das mit dem Rucksack getragen werden kann.
Schätze die Kodierungslänge nach oben ab.
Beachte: Alle Werte sind positiv!

Aufgabe H35 (Die Ellipsoidmethode) (7 Punkte)
Betrachte folgendes Polytop $\mathscr{P}$ in $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ 3x_1 & & & \leq & 4 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

Stelle mit Hilfe der Ellipsoidmethode fest, ob $\mathscr{P}^0$ leer ist oder nicht. Verwende als Anfangsellipsoid einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 7.
Implementiere die Ellipsoidenmethode im Matlab. Rechne bitte in jedem Schritt auf vier Nachkommastellen genau. Die Ausgabe sollte für alle k: a_k, A_k, verletzte Ungleichung, c und d enthalten.

Aufgabe H36 (Der Kettenbruchalgorithmus) (5 Punkte)
Das Problem, reelle Zahlen durch rationale Zahlen zu approximieren, ist ein altes und bekanntes Problem aus der Zahlentheorie. In dieser Aufgabe wollen wir das zweidimensionale Approximationsproblem angehen. Dieses Resultat ist hilfreich, um die Äquivalenz des Separierungs- und des Optimierungsproblems zeigen. Dazu betrachten wir folgendes Problem:
Gegeben sei eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}, 0 < \varepsilon < 1$. Gesucht sind ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Auf den ersten Blick ist nicht einzusehen, dass solch eine rationale Zahl immer existiert, aber genau dies ist der Fall. Mehr noch, eine solche Zahl kann sogar in polyno mialer Zeit bestimmt werden. Dazu dient der folgende Algorithmus:

Input: $\alpha \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.
Output: p und q mit $1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ und $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$.

(1) Initialisierung:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha, & a_0 &= \lfloor \alpha \rfloor, \\ g_{-2} &= 0, & g_{-1} &= 1, \\ h_{-2} &= 1, & h_{-1} &= 0, \\ i &= -1. \end{aligned}$$

(2) Führe die folgenden Schritte durch:
(3) $i = i + 1$
(4) $g_i = a_i g_{i-1} + g_{i-2}$
(5) $h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}$
(6) Falls $h_i > \frac{1}{\varepsilon}$ **STOP** (gib $p = g_{i-1}$ und $q = h_{i-1}$ aus).
(7) Falls $\alpha_i = a_i$ **STOP** (gib $p = g_i$ und $q = h_i$ aus).
(8) $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}$
(9) $a_{i+1} = \lfloor \alpha_{i+1} \rfloor$
(10) Gehe zu (3).

Approximiere den Wert $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0,01$ durch eine rationale Zahl. D.h. finde

$$p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } |\sqrt{2} - \frac{p}{q}| < \frac{0,01}{q}, \quad 1 \leq q \leq 100.$$