Einführung in die Optimierung
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
16.12.2010/ 13.01.2011

Rechnerübung

Aufgabe R1 (Simplex-Algorithmus)
Implementiere den Simplex-Algorithmus aus der Vorlesung (Algorithmus 5.6). Definiere dazu die Funktion

```
[xOpt, message] = simplex(A, b, c, B).
```

Die Variablen sollen die folgende Bedeutung haben:

- Der Vektor `xOpt` ist eine Optimallösung, falls eine solche existiert.
- Die Zeichenkette (*string*) `message` soll die Mitteilung „Das LP besitzt eine Optimallösung.“ oder „Das LP ist unbeschränkt.“(*unbounded*) beinhalten.
- Die Matrix `A` und die Vektoren `b` und `c` entsprechen denen aus der Standardform (siehe (5.1)). Dabei sollen für $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ die Vorraussetzungen (*assumptions*) $n \geq m$ und $\operatorname{rang}(A) = m$ gelten.
- Der Vektor `B` soll eine zulässige Startbasis (*initial solution*) repräsentieren. Die m Einträge des Vektors sollen die in der Basis enthaltenen Indizes sein.

Teste deine Implementierung mit dem LP aus dem Beispiel 5.7 aus der Vorlesung und mit dem folgenden LP:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Hinweis: Die Befehle `find`, `size`, `zeros` und `min` könnten hilfreich sein. Schaue bei Bedarf in der Hilfe nach. Um ein Gleichungssystem zu lösen ist \ nützlich. Denke auch über die Rechnerungenauigkeit nach.

Aufgabe R2 (Kreiseln (*cycles*))
Gegeben sei das LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 12x_4 & & \\
\text{s.t.} & -2x_1 & - & 9x_2 & + & x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\
 & \frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & 2x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_1,\dots,x_4 & \geq & 0
\end{array}.
$$

Weise mit Hilfe deiner Implementierung nach, dass der Simplex-Algorithmus bei diesem Beispiel kreiseln (*cycle*) kann. Gib dazu in jeder Iteration die aktuelle Basis sowie alle möglichen eintretenden (*entering*) und verlassenden (*leaving*) Variablen aus und lasse den Benutzer wählen welche Variable in die Basis eintritt und welche sie verlässt.

Aufgabe R3 (Interpretation)
Löse das LP aus der Aufgabe G19 vom 6. Übungsblatt. Lies aus der Optimallösung ab, um wieviel die Belastbarkeit der einzelnen Seile maximal verringert werden kann, sodass das Gerüst die Gewichte noch tragen kann.

Hausübung

Aufgabe H23 (Dualer Simplex) (6 Punkte)

Löse folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeige zunächst, dass die Schlupfvariablen eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 4 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, & \geq & 0. \end{array}$$

Aufgabe H24 (Basen für den dualen Simplex-Algorithmus) (9 Punkte)

Seien $b \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}^n$ und $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang. Das duale LP (in der dualen Standardform) hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{rrcl} \max & b^T y & & \\ \text{s.t.} & A^T y + Iz & = & c \\ & z & \geq & 0 \end{array} . \tag{1}$$

Sei $D := (A^T, I) \in \mathbf{R}^{n \times (m+n)}$. Eine Menge von Indizes $H \subset \{1, \ldots, n+m\}$ heißt *Basis* von (1), wenn D_H regulär ist. Die zugehörige Basislösung ist dann $u_H := D_H^{-1} c$ und $u_{\{1,\ldots,m+n\} \setminus H} := 0$. Eine Basis heißt *zulässig*, wenn $u_{H \cap \{m+1,\ldots,m+n\}} \geq 0$ gilt, das heißt alle Einträge der Basislösung, die zu z gehören, sollen nichtnegativ sein.

Der duale Simplex-Algorithmus betrachtet nur zulässige Basen H mit der Eigenschaft $\{1, \ldots, m\} \subset H$ und wählt aus diesen eine beste. Es soll gezeigt werden, dass mit dieser Vorgehensweise das Problem (1) gelöst wird. Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Das Problem (1) in primaler Standardform lautet

$$\begin{array}{rrcl} \max & b^T y^+ - b^T y^- & & \\ \text{s.t.} & A^T y^+ - A^T y^- + Iz & = & c \\ & y^+, y^-, z & \geq & 0 \end{array} . \tag{2}$$

Zeige, dass zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis H von (1) mit gleichem Zielfunktionswert existiert.

(b) Das Problem (2) habe eine Optimallösung. Zeige, dass dann zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis $\tilde{B}$ existiert, deren Zielfunktionswert größer oder gleich dem von B ist, und die die Eigenschaft erfüllt, dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$i \in \tilde{B} \quad \text{oder} \quad i + m \in \tilde{B} \tag{3}$$

gilt.

Tipp: Nimm o.B.d.A. an, dass für $i = 1$ die Bedingung (3) verletzt ist, das heißt weder y_1^+ noch y_1^- ist in der zulässigen Basis B. Betrachte die reduzierten Kosten von y_1^+ und y_1^-. Zeige anhand der Schritte FTRAN und Ratio-Test des Simplex-Algorithmus, dass y_1^+ oder y_1^- gegen ein z_i mit $i \in B$ ausgetauscht werden kann. Teile dazu γ im Ratio-Test in γ_1, γ_2 auf, wobei γ_1 das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B_k \leq 2m$ und γ_2 entsprechend das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B_k > 2m$ sei.

(c) Beweise mit Hilfe des bisher Gezeigten den folgenden Satz aus der Vorlesung: Das LP (1) habe eine Optimallösung. Dann gibt es eine optimale Basis H_{opt} mit $\{1, \ldots, m\} \subseteq H_{\text{opt}}$.