Einführung in die Optimierung
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
09./10.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Relaxierungen)
Betrachte das folgende LP mit Ganzzahligkeitsbedingungen (*integer problem*). Solche Probleme sind im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen. Ersetzt man die Ganzzahligkeitsbedingungen (*integer constraints*) $x_i \in \{0,1\}$ durch die linearen Nebenbedingungen (*linear constraints*) $0 \leq x_i \leq 1$, erhält man die sogenannte *LP-Relaxierung* (R) (*relaxation*) von (IP), die wesentlich einfacher zu lösen ist:

$$(IP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,n \end{array} \qquad\qquad (R)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1,\dots,n \end{array}$$

Untersuche den Zusammenhang (*correlation*) zwischen (IP) und (R):

(a) Was sagt der Optimalwert von (R) über den Optimalwert von (IP) aus?

(b) Im Allgemeinen erfüllt die Optimallösung von (R) nicht für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ die Bedingung $x_i \in \{0,1\}$. Was kann man für (IP) folgern, wenn dies zufällig doch der Fall ist?

(c) Was folgt aus der Zulässigkeit (*feasibility*) bzw. Unzulässigkeit (*infeasibility*) von (R) für (IP)?

Aufgabe G21 (Ein leicht lösbares LP)
Seien $c, l, u \in \mathbf{R}^n$ und sei $l \leq u$. Geben Sie eine explizite Lösung für folgendes LP an:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & l \leq x \leq u \end{array}$$

Aufgabe G22 (Basislösungen) (3 Punkte)
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Zeige: Besitzt das obige LP eine nicht-degenerierte optimale Basislösung, so besitzt das dazu duale LP eine eindeutige Optimallösung.

Aufgabe G23 (Simplexalgorithmus)
Löse das folgende Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus. Beachte, dass das LP nicht in Standardform vorliegt.

$$\begin{array}{rr} & \max\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Starte im Punkt $x = (0,0,0)$.

Hausübung

Aufgabe H20 (Quotientenoptimierungsproblem) (8 Punkte)
Betrachte das Quotientenoptimierungsproblem

$$\text{(QOP)} \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{c^T x+\alpha}{d^T x+\beta} \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

wobei $A \in \mathbf{R}^{m\times n}, c, d \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}^m, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Die zulässige Menge, also das Polyeder $\mathscr{P} = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \le b, x \ge 0\}$, sei beschränkt. $c^T x + \alpha$ und $d^T x + \beta$ sollen keine gemeinsamen Nullstellen in $\mathscr{P}$ haben.

(a) Zeige: Wenn es Punkte $x_1, x_2 \in \mathscr{P}$ gibt mit

$$d^T x_1 + \beta < 0 \quad \text{und} \quad d^T x_2 + \beta > 0 \tag{$\star$}$$

dann ist die Zielfunktion von (QOP) auf $\mathscr{P}$ unbeschränkt.

Betrachte nun den Fall, dass sich das Vorzeichen des Nenners auf der zulässigen Menge nicht ändert, d.h. nehme o.B.d.A. an, dass $d^T x + \beta > 0$ für alle $x \in \mathscr{P}$ gilt.

(b) Durch die Variablentransformation $z = \frac{1}{d^T x+\beta}$ und $y = zx$ kann (QOP) in ein lineares Optimierungsproblem mit einer zusätzlichen Variablen und einer zusätzlichen Nebenbedingung umgewandelt werden. Formuliere dieses LP.

(c) Zeige: Ist $(\bar{y}, \bar{z})$ eine Optimallösung des LPs, dann gilt $\bar{z} > 0$.

(d) Zeige: Ist $(\bar{y}, \bar{z})$ eine Optimallösung des LPs, dann ist $\bar{x} = \frac{1}{\bar{z}}\bar{y}$ eine Optimallösung von (QOP).

Aufgabe H21 (Simplexalgorithmus) (4 Punkte)
In Aufgabe H10 (a) wurde das folgende lineare Programm aufgestellt

$$\begin{aligned} \max\ 150x_1 + 450x_2 & \\ \text{s.t.} \quad x_1 &\le 120 \\ x_2 &\le 70 \\ x_1 + x_2 &\le 140 \\ x_1 + 2x_2 &\le 180 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Löse das Programm mit dem Simplexverfahren für den Startpunkt $(120, 20)$. Erstelle eine Skizze des Polyeders, das das LP beschreibt und zeichne jede Basislösung ein. Interpretiere jeden Basisaustauschschritt anhand der Zeichnung.

Aufgabe H22 (Modellierung) (3 Punkte)
Ein Landwirt möchte höchstens 100 ha Land bepflanzen, und zwar mit Kartoffel, Weizen und Rüben. Die benötige Daten sind in folgender Tabelle zusammengefaßt

	Kartoffel	Weizen	Rüben	Zur Verfügung stehen
Anbaukosten [TDEu/ha]	1	2	1	110 TDEu
Arbeitstage [Tg/ha]	1	3	2	160 Arb.Tg.
Reingewinn [TDEu/ha]	3	6	4	

Wie viel ha soll er mit Kartoffel, wie viel mit Weizen und wie viel mit Rüben bepflanzen, um einen optimalen Gewinn zu erzielen?

(a) Man erstelle ein mathematisches Modell und ermittle einen Maximierer mit Hilfe einer Skizze im $\mathbf{R}^3$‘.

(b) Wie lautet das Modell in Standardformat? Man gebe die Koordinaten des Maximierers für das Standartformat an!