Einführung in die Optimierung
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
02./03.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Zwei Kegel (*two cones*), die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen und der Schlupf (*slack*))
Betrachte die folgenden zueinander dualen Probleme:

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \end{array} \qquad\qquad (\mathrm{D}) \qquad \begin{array}{rl} \max & -b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y = -c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

und die beiden Kegel (*cones*)

$$\mathcal{N}(x) = \mathrm{cone}(A^T_{\mathrm{eq}(\{x\}).}) = \left\{ \sum_{i \in \mathrm{eq}(\{x\})} \lambda_i A^T_{i.} \mid \lambda_i \ge 0 \text{ für alle } i \in \mathrm{eq}(\{x\}) \right\},$$

$$\mathcal{X}(x) = \left\{ r \in \mathbf{R}^n \mid A_{\mathrm{eq}(\{x\}).} r \le 0 \right\}.$$

(a) Veranschauliche (*illustrate*) die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (Satz 4.12) anhand einer Skizze. Zeichne dazu ein zweidimensionales Polyeder (*polyhedron*), wähle eine Ecke (*vertex*) q und einen inneren Punkt (*interior point*) p einer Kante (*edge*) und skizziere jeweils die Kegel $\mathcal{N}$ und $\mathcal{X}$. Für welche c ist q beziehungsweise p eine Optimallösung?

(b) Formuliere die KKT-Bedingungen unter Verwendung von $\mathcal{N}(x)$.

(c) Skizziere einen Fall, in dem x und c so gewählt sind, dass kein y die starke Komplementarität (*strong complementarity*) erfüllt.

Aufgabe G18 (Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*))
Gegeben sei das lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{rll} \min & x_1 - x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \le 5 \\ & x_2 + 2x_3 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \ge 0. \end{array}$$

(a) Bestimme das dazugehörige duale lineare Programm (DLP).

(b) Stelle die Bedingung des komplementären Schlupfes für die Programme auf und benutze diese, um (LP) und (DLP) zu lösen.

(c) Finde ein, möglichst kleines, Beispiel für ein Optimierungsproblem, bei dem es eine Optimallösung $\bar{x}, \bar{y}$ gibt, in der die Äquivalenzen des Satzes vom starken komplementären Schlupf gelten, und eine Optimallösung $\hat{x}, \hat{y}$, in der die Äquivalenzen nicht gelten. Gib $\bar{x}, \bar{y}$ und $\hat{x}, \hat{y}$ an.

Aufgabe G19 (Modellierung)
Gegeben sei das Hängegerüst wie in Abbildung 1. Die Seile S_1 und S_2 können je 300kg Last, die Seile S_3 und S_4 je 100kg und die Seile S_5 und S_6 jeweils 50kg Last tragen. Unter Vernachlässigung des Gewichts der Seile und der Bohlen soll das maximal zulässige Gesamtgewicht $y_1 + y_2 + y_3$ für die Lasten gefunden werden.

(a) Formuliere dieses Problem als lineares Programm.

(b) Stelle das dazugehörige duale lineare Programm auf und diskutiere die Bedeutung einer Optimallösung.

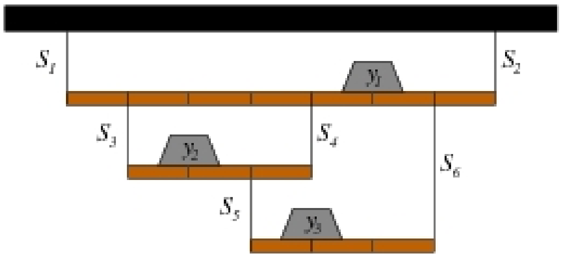

Abbildung 1: Gerüst zu Aufgabe G19

Hausübung

Aufgabe H17 (Aktive Nebenbedingungen (*active constraints*)) (5 Punkte)
Sei x^* eine Optimallösung des linearen Optimierungproblems $\min\{c^T x \mid Ax \leq b\}$.
Beweise: Es gilt

$$\min\left\{c^T x \mid Ax \leq b\right\} = \min\left\{c^T x \mid A_{\mathrm{eq}(x^*)\cdot} x \leq b_{\mathrm{eq}(x^*)}\right\}.$$

Was lässt sich über die Beziehung zwischen den Mengen (*sets*) der Optimallösungen der beiden Optimierungsprobleme aussagen?

Aufgabe H18 (LP und LD) (5 Punkte)
Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

$$(LP) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl} \min & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 6x_4 & + & 6x_5 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \geq & 1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq & 0 & \end{array}$$

(a) Bestimme die dazu duale Aufgabe LD. Stelle die Aufgabe LD in einer Skizze dar.

(b) Bestimme einen Minimierer von LD graphisch.

(c) Ermittle aus der Optimallösung von LD eine solche für LP.

Aufgabe H19 (Schwache Dualität (*weak duality*)) (5 Punkte)
Was ist an der folgenden Argumentation falsch? Gib für jede Abschätzung (*estimation*) an, ob und warum sie richtig oder falsch ist.
Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{aligned} \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (1)\\ &\leq \max\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (2)\\ &\leq \min\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (3)\\ &\leq \max\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (4)\\ &\leq \min\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (5)\\ &\leq \max\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (6)\\ &\leq \min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (7)\\ &\leq \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (8) \end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit (*equality*), insbesondere zwischen den letzten beiden Zeilen, und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.