Einführung in die Optimierung
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
9. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Polyeder)
Betrachte das Polyeder $\mathscr{P}$, das durch die folgenden Ungleichungen gegeben ist:

$$x_1 + 2x_2 \geq 1, \qquad -x_1 \leq 1, \qquad x_1 - x_2 \geq -3,$$
$$x_2 \geq 1, \qquad -2x_1 - x_2 \leq 0.$$

(a) Fertige eine Skizze von dem Polyeder an.

(b) Bestimme anhand der Skizze alle Ecken, Kanten, und Facetten des Polyeders und gib jeweils die Ungleichungen an, die die jeweilige Seitenfläche induzieren.

(c) Finde eine Matrix A und einen Vektor b, sodass $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A,b)$ gilt und das System $Ax \leq b$ irredundant ist.

(d) Finde eine Matrix B und einen Vektor c, sodass $\mathscr{P}$ äquivalent zu $\mathscr{P}^{=}(B,c)$ ist. Gilt $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{=}(B,c)$?

Aufgabe G8 (Polyeder?)
Welche der folgenden Mengen sind Polyeder? Beweise oder widerlege:

(a) $\mathscr{M}_1 := \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid a_1^T X a_1 \leq a_2^T X a_2\right\}$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\mathscr{M}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ e^T x = 1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\right\}$, mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. e sei der Vektor in $\mathbb{R}^n$, dessen Komponenten alle gleich 1 sind,

(c) $\mathscr{M}_3 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ x^T y \leq 1 \text{ für alle } y \text{ mit } \|y\|_2 = 1\right\}$.

Aufgabe G9 (Kegel)
Eine Menge $\mathscr{K}$ heißt *Kegel*, wenn mit $x \in \mathscr{K}$ auch $\alpha x \in \mathscr{K}$ für jede Zahl $\alpha \geq 0$. Beweise oder widerlege:

(a) Sei $\mathscr{K}$ ein Kegel. Es gilt $x + y \in \mathscr{K}$ für alle $x, y \in \mathscr{K}$ genau dann, wenn $\mathscr{K}$ konvex ist.

(b) Jeder Kegel hat höchstens einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.

(c) Ein polyedrischer Kegel der Form $\mathscr{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) hat genau einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.

Aufgabe G10 (Modellierung)
Ein Unternehmen stellt zwei Gürteltypen A und B her. A ist von besserer Qualität als B. Der Nettogewinn beträgt bei A 2 Geldeinheiten und bei B 1.50 Geldeinheiten. Der Zeitaufwand für die Produktion eines Gürtels vom Typ A beträgt 2 Zeiteinheiten. Für den Typ B wird 1 Zeiteinheit pro Gürtel benötigt. Täglich stehen maximal 1000 Zeiteinheiten zur Verfügung. Die Lederbelieferung erlaubt eine Produktion von 800 Gürteln pro Tag, egal um welchen Typ es sich handelt. Außerdem stehen pro Tag höchstens 400 Schnallen für den Typ A und 700 Schnallen für den Typ B zur Verfügung. Wie soll die Produktion aufgeteilt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird? Modelliere diese Problemstellung als Optimierungsproblem und löse es graphisch.

Hausübung

Aufgabe H8 (Träger und total unimodulare Matrizen) (5 Punkte)

(A) Wir definieren den Träger von $x \in \mathbb{R}^n$ als $\text{supp}(x) = \{i \in \{1,2,\dots,n\} \ : \ x_i \neq 0\}$. Beweise:

Für $x \in P^=(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) *x ist eine Ecke von $P^=(A,b)$.*

(2) $\text{rang}(A_{\cdot\,\text{supp}(x)}) = \left|\text{supp}(x)\right|$.

(3) *Die Spaltenvektoren $A_{\cdot j}$, $j \in \text{supp}(x)$, sind linear unabhängig.*

(B) Eine Matrix $A \in \{-1,0,1\}^{m\times n}$ heißt total unimodular, wenn für jede quadratische Untermatix A' von A (d.h. A' ist durch Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgegangen) gilt:

$$\det(\mathrm{A}') \in \{-1,0,1\}.$$

Seien A total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Beweise: Ist A total unimodular, dann hat das Polyeder $P^=(A,b)$ nur ganzzahlige Ecken.

Lösungshinweis: Verwende (A) auf einen Eckpunkt x. In $A_{\cdot\,\text{supp}(x)}$ findest Du dann eine geeignete quadratische Untermatrix $A_{I\,\text{supp}(x)}$. Stelle x als Lösung des Gleichungssystem $A_{I\,\text{supp}(x)}x_I = b_I$ dar. Dieses Gleichungssystem lässt sich mittels der Cramerschen Regel analysieren – was fällt an den dort vorkommenden Determinanten auf?

Aufgabe H9 (Umformulierungen) (5 Punkte)

(A) Betrachte die konvexe Funktion $f(x) = \max\{c^T x + \alpha, d^T x + \beta\}$. Formuliere das Optimierungsproblem

$$\min\{f(x) : Ax = b, x \geq 0\}$$

als lineares Problem (lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen). Dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(B) Zum näherungsweisen Lösen überbestimmter Gleichungssysteme $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, wird oft ein Optimierungsproblem formuliert, in dem das Residuum bezüglich einer gegebenen Norm minimiert werden soll:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} ||Ax - b||$$

Formuliere dieses Problem als lineares Programm für:

(a) Die Maximumnorm

$$||v||_\infty := \max_{i=1\dots m} |v_i|$$

(b) Die Summennorm

$$||v||_1 := \sum_{i=1}^{m} |v_i|$$

Aufgabe H10 (Modellierung) (5 Punkte)

Das Zweigwerk der Stahlmöbel GmbH prodiziert nur Schreibtische und Stahlschränke. Die vorgeschnittenen Stahlbleche werden jeweils in drei aufeinander folgenden Betribsabteilungen A_1, A_2 und A_3 bearbeitet. Die für Planungsmonat verfügbaren Kapazitätet betragen:

- in A_1: 900 h
- in A_2: 2100 h
- in A_3: 1000 h

Zur Produktion eines Schreibtisches bzw. eines Stahlschrankes werden im einzelnen folgende Bearbeitungszeiten (Angabe in h/Stück) benötigt:

	A_1	A_2	A_3
Schreibtisch	3	7,5	2,5
Stahlschrank	3	5	5

Die variablen Kostensätze pro Wekrstattstunde in den Abteilungen betragen (Euro/h):

- in A_1: 30 Euro/h

- in A_2: 40 Euro/h
- in A_3: 20 Euro/h

Die sonstigen variablen Kosten (Materialeinsatz, Energie etc.) betragen

- pro Schreibtisch: 60 Euro/Stückpreis
- pro Stahlschrank: 70 Euro/Stückpreis

Das Zweigwerk liefert die monatliche Produktion zu vorgegebenen Preisen von 550 Euro/Schreibtisch und 560 Euro/Stahlschrank an eine konzerneigene Vertriebsgesellschaft. Der Leiter des Zweigwerkes ist von der Konzernleitung angewiesen worden, höchstens 210 Schreibtische und höchstens 160 Stahlschränke pro Monat zu prodozieren. Innerhalb dieses Raumes soll er das Sortiment von Schreibtischen und Stahlschränken so zusammenstellen, dass ein maximaler Gewinn entsteht.

(a) Erstellen Sie ein mathematisches Modell für das Problem.

(b) Ermitteln Sie eine Optimallösung des Problems mit Hilfe einer Skizze im $\mathbb{R}^2$