Einführung in die Optimierung
2. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
2. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Konvexe & konkave Funktionen)
Welche der folgenden Funktionen sind konvex, welche konkav, welche weder konvex noch konkav?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2xy - x^2 - y^2$,

(c) $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$,

(d) die Norm $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ mit $(1 \leq p \leq +\infty)$.

Aufgabe G5 (Epigraph & konvexe Funktionen)

(a) Der Epigraph $\mathscr{E}(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathscr{E}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Stelle $\mathscr{E}(f)$ für $f(x) = x^2$ grafisch dar und beweise folgenden Satz:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist konvex $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{E}(f)$ ist konvex.

(b) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und $\alpha > 0$. Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

$$\alpha f_1, \quad f_1 + f_2, \quad f_1 - f_2, \quad f_1 \cdot f_2, \quad \max[f_1, f_2], \quad \min[f_1, f_2]$$

Beweise oder widerlege.

(c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion ($x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$). Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.
Zeige, dass $h : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(f(x))$ auch konvex ist.

Aufgabe G6 (Modellierung)
Ein Käufer möchte 150 000 Stück einer Ware kaufen. Drei Verkäufer legen Angebote vor, die in der folgenden Tabelle beschrieben sind. Es sind jeweils die Fixkosten (sie entstehen unabhängig davon, wie viel gekauft wird) und die Stückpreise in GE angegeben. Diese können je nach gekaufter Menge variieren. Außerdem ist die Lieferkapazität der Verkäufer beschränkt.
Seien x_1, x_2 bzw. x_3 die Stückzahl, die bei Verkäufer 1, 2 bzw. 3 gekauft wird. Ziel ist es, so einzukaufen, dass die Gesamtkosten minimal sind.

Verkäufer	Fixkosten	Stückpreis	Menge
1	3 520.20	51.20	$0 < x_1 \leq 50\,000$
2	82 810.00	52.10	$0 < x_2 \leq 20\,000$
		51.10	$20\,000 < x_2 \leq 60\,000$
		50.10	$60\,000 < x_2 \leq 80\,000$
		49.10	$80\,000 < x_2 \leq 100\,000$
3	0	60.50	$0 < x_3 \leq 50\,000$
		59.00	$50\,000 < x_3 \leq 80\,000$

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass beispielsweise für Verkäufer 2 das 20 001ste Stück zu einem günstigeren Preis angeboten wird als die ersten 20 000 Stück.
Formuliere das geschilderte Problem als Optimierungsproblem und untersuche, ob die Zielfunktion konvex oder konkav ist und die zulässige Menge konvex ist.

Hausübung

Aufgabe H4 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Definitionen:

Definition 1: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für beliebige Punkte $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \ge 0$ mit $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Aufgabe H5 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Zeige, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

(b) Zeige, dass für alle $x \in (a, b)$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Fertige eine Skizze an, die diese Ungleichung illustriert.

Aufgabe H6 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

(a) Die (untere) Niveaumenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Niveau β ist definiert durch

$$\mathscr{L}(f, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \beta\}.$$

Beweise: f ist konvex. $\Rightarrow \mathscr{L}(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$.
Gilt auch die Umkehrung?

(b) Beweise:

i. Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist auch $\operatorname{conv}\mathscr{M}$ kompakt.

ii. Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.
Dann gilt:

$$\max\{f(x) \mid x \in \mathscr{M}\} = \max\{f(x) \mid x \in \operatorname{conv}\mathscr{M}\}.$$

Aufgabe H7 (Modellierung) (3 Punkte)

Ein Betrieb fertigt zwei Produkte $P1$ und $P2$, die unterschiedliche Deckungsbeiträge je t bringen. Bei ihrer Fertigung durchlaufen sie die Anlagen A, B und C, deren monatliche Kapazität (in h je Monat) begrenzt sind. Beide Produkte benötigen unterschiedliche Fertigungszeiten (in h je t) auf den Anlagen:

Produkt		$P1$	$P2$	Kapazität
Deckungsbetrag	Euro/t	3000	2000	h pro Monat
Bearbeitungszeit in h/t auf der Anlage	A	4	4	200
	B	2	5	220
	C	6	3	240

Die Fixkosten betragen 30000 Euro pro Monat.

Zu den angegebenen Restriktionen kommen noch folgenden hinzu: Auf Grund vertraglicher Verpflichtungen sind von $P2$ mindestens $30t$ herzustellen; auf dem Markt können höchstens $40t$ von $P2$ abgesetzt werden. Produkt $P1$ kann zur Zeit unbegrenzt abgesetzt werden (Produktion auf Lager ist nicht vorgesehen.) Zusätzlich zu diesen Bedingungen seien noch die knappen Rohstoffe $R1$ und $R2$ zu berücksichtigen. Sie stehen mit monatlich $21t$ ($R1$) bzw. $26t$ ($R2$) zur Verfügung. Für jede t von $P1$ werden $0.1t$ von $R1$ und $0.5t$ von $R2$, für jede t von $P2$ werden $0.6t$ von $R1$ und $0.3t$ von $R2$ verbraucht.

Man erstelle ein mathematisches Modell für dieses Problem! Ist die zulässige Menge konvex?