Einführung in die Optimierung
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2010/2011
04.10.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Modellierung)
Das Management eines Krankenhauses hat folgenden Bedarf an Krankenpflegern bzw. Krankenschwestern:

Zeit	benötigte Schwestern/Pfleger
0.00 bis 4.00	50
4.00 bis 8.00	60
8.00 bis 12.00	40
12.00 bis 16.00	50
16.00 bis 20.00	30
20.00 bis 24.00	25

Das Pflegepersonal arbeitet in 8-Stunden-Schichten, wobei eine Schicht um 0, 4, 8, 12, 16 oder 20 Uhr beginnt. Es soll ein Dienstplan erstellt werden, der mit der kleinstmöglichen Anzahl an Pflegern bzw. Schwestern auskommt.
Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem. Ist die zulässige Menge konvex?

Aufgabe G2 (Modellierung)
Ein Erzeuger von Tierfutter produziert ein Gemisch aus drei Bestandteilen: zwei nährstoffreiche Bestandteile und ein Füllmittel. Ein Kilogramm Futter muss einen Minimalgehalt an Nährstoffen enthalten:

Nährstoff	A	B	C	D
Gramm	90	50	20	2

Die nährstoffreichen Bestandteile setzen sich wie folgt zusammen:

	A	B	C	D	Kosten/kg
Bestandteil 1 in Gramm/kg	100	80	40	10	40
Bestandteil 2 in Gramm/kg	200	150	20	–	60

Das Futtergemisch soll so erzeugt werden, dass die Kosten möglichst gering sind. Formulieren Sie dies als Optimierungsproblem. Skizzieren Sie die zulässige Menge. Ist sie konvex?

Aufgabe G3 (Konvexe Mengen)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie konvexer Mengen ist wieder eine konvexe Menge.

(b) Jeder von einer Hyperebene $\mathscr{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha\}$ erzeugte abgeschlossene Halbraum

$$\mathscr{H}^a = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \alpha\}$$

ist konvex.

(c) Sind die Mengen $\mathscr{C}_i \cup \mathscr{C}_j$ konvex für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, so ist auch $\bigcup_{i=1}^n \mathscr{C}_i$ konvex.

(d) Die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems $Ax \leq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ (das Ungleichheitszeichen ist dabei zeilenweise zu verstehen) ist konvex.

(e) Jede abgeschlossene Kugel um einen gegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vom Radius $\alpha > 0$

$$\mathscr{B}_\alpha(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \alpha\}$$

ist konvex.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvexe Mengen)
Beweisen Sie:

(a) Die Projektion einer konvexen Menge auf einen affinen Teilraum ist wieder eine konvexe Menge.

(b) Die konvexe Hülle einer Menge $\mathscr{M}$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus $\mathscr{M}$.

(c) Die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ist konvex.

Aufgabe H2 (Modellierung)
Zum Transport von n Kugeln mit Radius r soll eine quaderförmige Kiste konstruiert werden, sodass die Oberfläche der Kiste möglichst klein ist.
Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem. Ist die zulässige Menge konvex?

Aufgabe H3 (Modellierung)
Ein Betrieb gewinnt durch ein Separationsverfahren aus zwei Rohstoffen R_i drei Substanzen S_j, von denen er monatlich die angegebenen Mindestmengen zur Weiterverarbeitung benötigt. Jede der drei Substanzen ist in beiden Rohstoffen in unterschiedlichen Mengen vorhanden; die Ausbeute in t pro t des Rohstoffes ist in folgender Tabelle angegeben:

Ausbeute in t pro t von R_i für Substanz	R_1	R_2	Mindestmenge für S_j (t/Mon.)
S_1	0,1	0,4	24
S_2	0,1	0,2	20
S_3	0,3	0,2	42
Rohstoffpreise	400	600	

Gesucht ist die kostenminimale Mengenkombination (x_1, x_2) der monatlich zu beschaffenden Rohstoffe R_i, $i = 1, 2$, wobei die benötigten Mindestmengen für die Stoffe S_j zu berücksichtigen sind. Kosten für die Separation sollen dabei unberücksichtig bleiben. Man erstelle ein mathematisches Modell. Ist die zulässige Menge konvex?