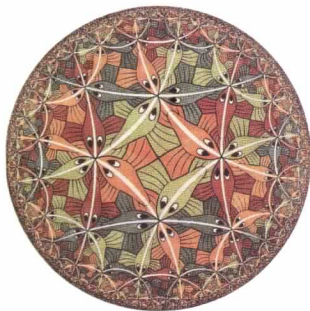


len feststellen, den „geraden Linien“ unseres physikalischen Universums. Wenn Lichtstrahlen von fernen Sternen nahe an einem massenreichen Stern, wie etwa unserer Sonne, vorbeilaufen, dann erscheint ihr Weg „gebogen“, ähnlich den Geodäten auf einer gekrümmten Fläche.

Welche nichteuklidische Geometrie man nehmen sollte, hängt davon ab, welcher Theorie des Universums man anhängt. Wenn man annimmt, daß die gegenwärtige Expansion des Weltalls einmal zu einem Stillstand kommen und sich das Universum dann wieder zusammenziehen wird, dann ist



**4.21** Grenzkreis III von dem holländischen Künstler M. C. Escher. Das Innere der Kreisscheibe ist eine Welt, in der die Geometrie hyperbolisch ist. In dieser Welt haben die abgebildeten Kreaturen alle die gleiche Größe. Das scheinbare Kleinerwerden bei Annäherung an den Kreisrand kommt durch die Art zustande, wie die hyperbolische Welt in die euklidische Welt, die auf dieser bedruckten Seite gilt, eingebettet ist. Escher war während seiner ganzen Schaffenszeit von mathematischen Ideen fasziniert und um deren künstlerische Darstellung bemüht. Er kannte sich in der Geometrie hervorragend aus und verarbeitete in vielen Lithographien und Holzschnitten geometrische Themen. Dem oben abgebildeten Holzschnitt Eschers liegt ein Kreismodell der hyperbolischen Geometrie zugrunde, das Henri Poincaré erfunden hat.

die Riemannsche Geometrie zur Beschreibung am besten geeignet. Wenn man andererseits davon ausgeht, daß sich das Universum immer weiter ausdehnen wird, dann ist die hyperbolische Geometrie die richtige.

Besonders faszinierend ist, daß Einsteins Relativitätstheorie und die astronomischen Beobachtungen, die zeigten, daß sie der Newtonschen Theorie überlegen ist, erst mehr als ein halbes Jahrhundert nach der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien entstanden. Hier haben wir also ein Beispiel dafür, wie die Mathematik unserem Verständnis von der Welt voraussehen kann. Anfänglich führte die Abstraktion geometrischer Muster aus Beobachtungen in der Welt die Griechen zur Entwicklung einer reichhaltigen mathematischen Theorie, der euklidischen Geometrie. Im 19. Jahrhundert hatten dann rein mathematische Fragen über diese Theorie, Fragen zur Axiomatisierung und zur Beweisbarkeit, die Entdeckung anderer geometrischer Theorien zur Folge. Und obwohl diese anderen Geometrien zunächst nur als abstrakte axiomatische Theorien entwickelt wurden, scheinbar ohne jede Anwendung in der wirklichen Welt, stellte sich schließlich heraus, daß sie tatsächlich für das Studium des Universums im großen besser geeignet sind als die euklidische Geometrie.

## Projektive Geometrie

Für den Landvermesser, der die lokale Gegend in einer Landkarte darstellen will, oder den Hausbauer beschreibt die euklidische Geometrie die relevanten Gesetze der Formen. Für den Seemann oder den Piloten, die den ganzen Globus umschiffen bzw. umfliegen, ist die sphärische Geometrie die richtige. Der Astronom beschreibt die geometrischen Zusammenhänge auf seinem Gebiet vielleicht am besten durch die Riemannsche Geometrie. Alles hängt davon ab, was man tun will und wie man es tun will.