Übungsklausur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1. Es geht um die zeichnerische Lösung von Aufgaben in der Anschauungsebene in Rahmen der Linearen Inzidenzgeometrie (Kap.1-4).

1. Welche der folgenden Hilfsmittel sind erlaubt?
   (a) Lineal, (b) Zirkel, (c) Geodreieck

2. Welche der folgenden Konstruktionen können und dürfen ausgeführt werden?
   (a) Ablesen oder Übertragen einer Länge
   (b) Zeichnen einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt
   (c) Zeichnen der Verbindungsgeraden zweier Punkte
   (d) Ablesen oder Übertragen eines Winkels
   (e) Markieren des Schnittpunkts zweier Geraden

Lösung.

1. (a) und (c) $\boxed{2}$

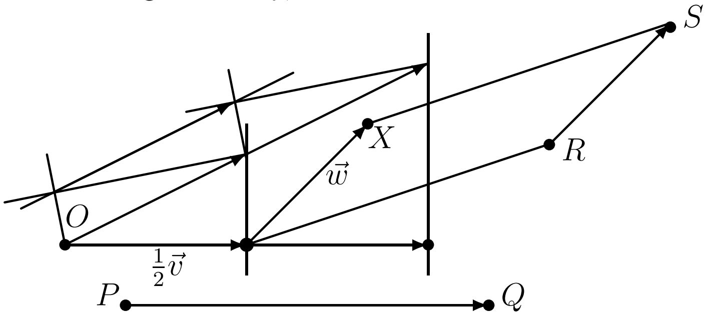
2. (b), (c) und (e) $\boxed{3}$

Ebenfalls erlaubt und oft erforderlich: Setzen eines neuen Punktes auf einer Geraden bzw. nicht auf endlich vielen gegebenen Geraden. $\boxed{2}$

Aufgabe 2. Auf dem Blatt (als Teil der Anschauungsebene) sind in Fig.1 die Punkte O, P, Q, R, S gegeben. Bestimmen Sie mit den nach Aufgabe 1 erlaubten Konstruktionen zeichnerisch den Punkt

$$X = \overrightarrow{RS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + O$$

Lösung $\vec{v} := \overrightarrow{PQ}$, $\vec{w} := \overrightarrow{RS}$

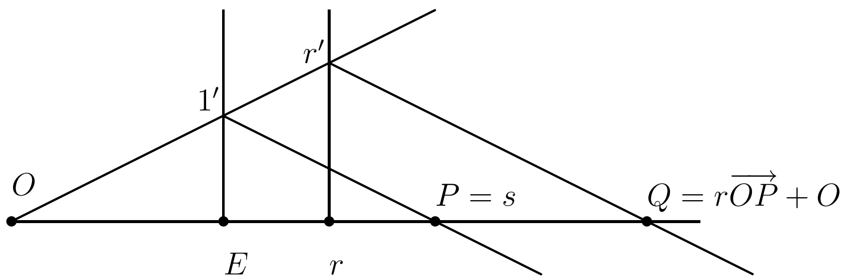


$\boxed{6}$

Komplette Erklärung $\boxed{4}$

Aufgabe 3. In Fig.2 sind die Zahlengerade g, O, E, der Skalar r und der Punkt P auf g gegeben. Ermitteln Sie durch Zeichnung den Punkt $Q = r\overrightarrow{OP} + O$. Q kann man auch als Skalar $q = rs$ auffassen. Markieren Sie s auf g.

Lösung



$\boxed{4}$

Es gilt $s = P$ $\boxed{1}$

Aufgabe 4. Gegeben sind die Koordinatensysteme $\alpha : O_\alpha, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\beta : O_\beta, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ der Ebene und ein Punkt P. Es gelte

$$\vec{b}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{a}_2,\ \vec{b}_2 = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2,\ \ \vec{v} = 4\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2,\ \ O^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sei P der Punkt $\vec{v} + O_\beta$. Bestimmen Sie die Koordinaten $\vec{v}^\alpha$ des Vektors $\vec{v}$ und P^α des Punktes P bzgl. α.

Lösung

$$\vec{v} = 4(2\vec{a} + 3\vec{a}_2) - 2(-\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2) = 10\vec{a}_1 + 8\vec{a}_2, \quad \vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$P^\alpha = \vec{v}^\alpha + O^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

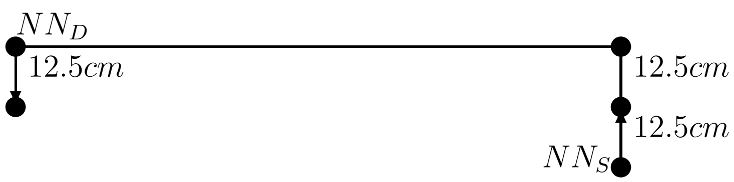
$\boxed{5}$

Skizze $\boxed{2}$

Werte nur aus Skizze abgelesen $\boxed{1}$

Aufgabe 5. Es soll eine Brücke über den Rhein von Deutschland in die Schweiz mit Vorbau von beiden Seiten gebaut werden. Die Normal-Nullpunkte der beiden Länder weichen um 25 cm voneinander ab: der Normal-Nullpunkt der Schweiz liegt bei $-25cm$ bzgl. des deutschen Normal-Nullpunktes. Beide Seiten wollen einen gleichen Beitrag dazu leisten, dass man sich in der Mitte exakt trifft. Um welchen Betrag und in welcher Richtung müssen jeweils die Deutschen bzw. die Schweizer von einer rein inländischen Planung abweichen?

Lösung



Die Deutschen müssen von den Höhenangaben über Normal-Null-Deutschland jeweisl 12.5 cm abziehen, die Schweizer zu den Höhenangaben über Normal-Null-Schweiz 12.5 cm addieren. $\boxed{6}$

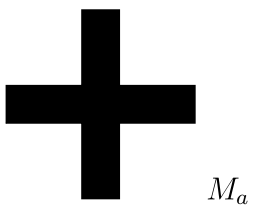
Allerdings waren bei der real gebauten Brücke die die beiten Teile in der Mitte 50 cm auseinander - was wenigstens den guten Willen beider Seiten beweist.

Aufgabe 6.

1. Welche der folgenden Teilmengen M_x $(x = a, b, c, d)$ der Ebene sind konvex?

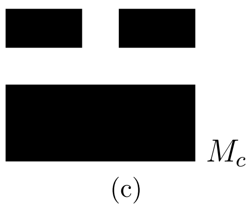
2. Skizzieren Sie $Z(M_x) = \{R \mid \text{ es gibt } P, Q \in M_x \text{ mit } R \in [P, Q]\}$ für alle nicht konvexen M_x. Welche $Z(M_x)$ sind konvex?

3. Skizzieren Sie die konvexe Hülle $KH(M_x)$ falls $Z(M_x)$ nicht konvex ist.

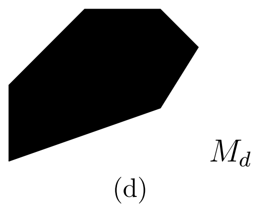


(a)

(b)



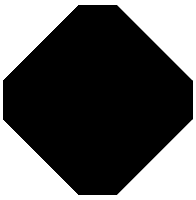
(c)



(d)

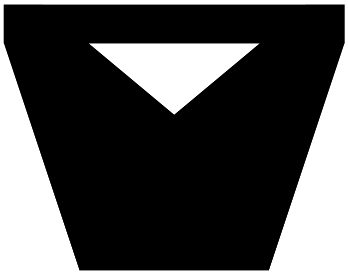
Lösung.

1. Nur M_d konvex $\boxed{2}$



$Z(M_a)$

(a)



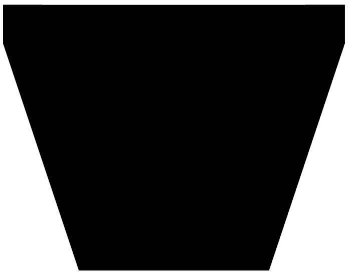
$Z(M_b)$

(b)

$Z(M_c)$

(c)

2. Nur $Z(M_a)$, $Z(M_c)$ und $Z(M_d)$ sind konvex $\boxed{4}$



$KH(M_b)$

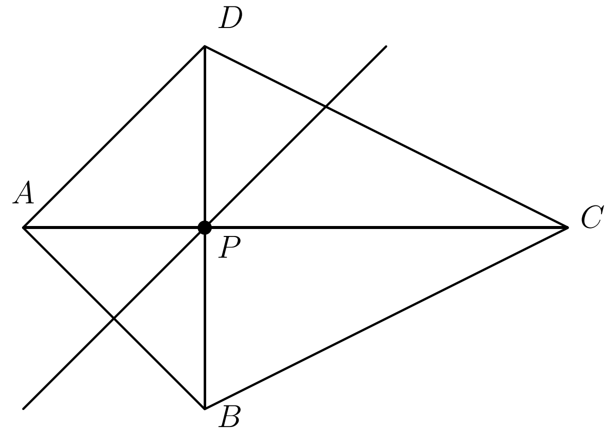
(a)

$\boxed{2}$

3.

Aufgabe 7. Gegeben seien 4 Punkte A, B, C, D in der Ebene, von denen keine 3 kollinear sind. Es sei $P = (A \vee C) \cap (B \vee D)$ der Schnittpunkt der Geraden durch AC bzw. BD und es gelte $P \in]A, C[$. Zeichnen Sie eine solche Konfiguration in der Anschauungsebene. Was ergibt sich aus der Zeichnung für die Lage von P zu B und D? Leiten Sie diese Aussage mithilfe der Axiome her.

Lösung



Man sieht in dieser Zeichnung, $P \in]B,D[$. Es geht aber auch so, dass 1
$B \in]P,D[$ bzw. $D \in]P,B[$. Und das folgt schon aus dem Trichotomieaxiom
(Z3) 5

Nimmt man (entsprechend der Zeichnung) an, dass keiner der 4 Punkte in der konvexen Hülle der 3 andern liegt, kann man $P \in]B,D[$ beweisen. Sei $P \notin]B,D[$ angenommen. Nach (Z3) gilt $B \in]P,D[$ oder $]D \in]P,B[$. Wegen $P \in Z(\{A,C\}$ folgt im ersten Fall $B \in Z^2(\{A,C,D\}) \subseteq KH(\{A,C,D\})$, im zweiten $D \in Z^2(\{A,C,B\}) \subseteq KH(\{A,C,B\})$, beidesmal im Widerspruch
zur Annahmen. Also doch $P \in]B,D[$. 12