9. Übung Geometrie für Lehramt

In Aufgabe 1 und 2 setzen wir alle geometrischen Axiome voraus. Aufgabe 3-5 können und sollen allein mit der Begrifflichkeit und den Axiomen von Vektorräumen mit Skalarprodukt bearbeitet werden.

Aufgabe 1. Gegeben Dreieck ABC, Punkt D in der durch $A \vee C$ und B bestimmten Halbebene sowie P mit $C \in]A, P[$. Erläutern Sie die folgende Aussage und geben Sie eine Herleitung

$$C \vee D \parallel A \vee B \;\Rightarrow\; \angle BAC \equiv \angle DCP \text{ und } \angle ABC \equiv \angle BCD$$

Lösung. Ist $C \vee D$ die Parallele durch C zu $A \vee B$ so wird α als Stufen, β als Wechselwinkel angetragen und bilden dann zusammen Nebenwinkel zu γ. Man kanns auch so sagen (auch wenn Winkelmessung noch nicht erklärt ist): Die Winkelsumme im Dreieck ist 180^o. Das war auch schon der Beweis.

Aufgabe 2. Sei $A = \vec{a} + P$, $B = \vec{b} + P$, $C = \vec{c} + Q$, $D = \vec{d} + Q$. Leiten Sie her

1. $APB \equiv CQD \Leftrightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{c}\|,\ \|\vec{b}\| = \|\vec{d}\|$ und $\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = \langle \vec{c} \,|\, \vec{d} \rangle$
2. $$\angle APB \equiv \angle CQD \Leftrightarrow \frac{\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\langle \vec{c} \,|\, \vec{d} \rangle}{\|\vec{c}\| \cdot \|\vec{d}\|}$$

Lösung.

1. Sei R der Fußpunkt des Lotes von B auf $P \vee A$ und S der Fußpunkt des Lotes von D auf $Q \vee C$. Dann gilt nach Def. des Skalarprodukts

   $$|PR| = (\pm 1)|\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle| \cdot \|\vec{a}\|, \quad |QS| = (\pm 1)|\langle \vec{d} \,|\, \vec{c} \rangle| \cdot \|\vec{c}\|$$

   und der Vorfaktor ist $+1$ genau dann, wenn $R > P$ in der Orientierung $A > P$ bzw. $S > Q$ in der Orientierung $C > Q$.

   Ist $APB \equiv CQD$, so sind die entsprechenden Seite gleichlang, nach (SSW) $PR \equiv QS$ und die Lagen von R bzw. S analog, also auch $\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = \langle \vec{c} \,|\, \vec{d} \rangle$.

   Umgekehrt haben wir $PB \equiv QD$, $PR \equiv QS$ und $BR \equiv DS$ nach Pythagoras, also erhalten wir $RPB \equiv SQD$ nach (SSS) und dann $APB \equiv CQQ$ mit (SWS).

2. Wegen Def. der Winkelkongruenz bzw. (E2) dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{d}\| = 1$. Dann $\Leftarrow$ sofort aus Teil 1. In $\Rightarrow$ haben wir $APB \equiv CQD$ nach (SWS) und können wieder mit Teil 1. schließen.

Aufgabe 3. Der Satz des Pythagoras lautet bekanntlich: Für ein Dreieck ABC gilt

$$A \vee C \perp B \vee C \;\Leftrightarrow\; |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

Formulieren Sie diesen Satz in der Begrifflichkeit der Vektorräume mit Skalarprodukt und leiten Sie ihn her.

Lösung. $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}+(-1)\vec{b} \mid \vec{a}+(-1)\vec{b}\rangle =_{(E3)} \langle \vec{a} \mid \vec{a}\rangle + \langle \vec{a} \mid (-1)\vec{b}\rangle + \langle (-1)\vec{b} \mid \vec{a}\rangle + \langle \vec{b} \mid \vec{b}\rangle =_{(E1,2,4)} \|\vec{a}\|^2 - 2\langle \vec{a} \mid \vec{b}\rangle + \|\vec{b}\|^2$. Somit gilt $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ genau dann, wenn $2\langle \vec{a} \mid \vec{b}\rangle = 0$, d.h. wenn $\langle \vec{a} \mid \vec{b}\rangle = 0$.

Aufgabe 4. Formulieren Sie in der Begrifflichkeit der Vektorräume mit Skalarprodukt und leiten Sie her: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Lösung. Gegeben Dreieck ABC setze $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Sei P der Schnittpunkt der Lote von B auf $A \vee C$ und von C auf $A \vee B$. Sei $\vec{p} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{v} = \vec{p} - \vec{c}$ und $\vec{w} = \vec{b} - \vec{p}$. Dann

$$\vec{b} + \vec{w} = \vec{c} + \vec{v} = \vec{p},\ \vec{w} \perp \vec{c},\ \vec{v} \perp \vec{b}$$

Es folgt

$$\langle \vec{p} \mid \vec{b} - \vec{c}\rangle = \langle \vec{p} \mid \vec{b}\rangle - \langle \vec{p} \mid \vec{c}\rangle = \langle \vec{c} \mid \vec{b}\rangle + \langle \vec{v} \mid \vec{b}\rangle - (\langle \vec{b} \mid \vec{c}\rangle + \langle \vec{w} \mid \vec{c}\rangle) = \langle \vec{c} \mid \vec{b}\rangle + 0 - \langle \vec{c} \mid \vec{b}\rangle + 0 = 0$$

Aufgabe 5. Der Kathetensatz des Euklid lautet bekanntlich: Für ein Dreieck ABC und Fußpunkt P des Lotes von C auf $A \vee B$ gilt

$$A \vee C \perp B \vee C \ \Leftrightarrow\ |AP| \cdot |AB| = |AC|^2$$

Formulieren Sie diesen Satz in der Begrifflichkeit der Vektorräume mit Skalarprodukt und leiten Sie ihn her.

Lösung. Sei $B = \vec{b} + A$, $C = \vec{c} + A$, $P = \vec{p} + A$, $\vec{q} = \vec{p} - \vec{c}$. Dann

$$\langle \vec{c} \mid \vec{b} - \vec{c}\rangle = \langle \vec{c} \mid \vec{b}\rangle - \langle \vec{c} \mid \vec{c}\rangle = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{b}\| - \|c\|^2$$

Also

$$\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{b}\| = \|c\|^2 \Leftrightarrow \langle \vec{c} \mid \vec{b} - \vec{c}\rangle \Leftrightarrow \vec{c} \perp (\vec{b} - \vec{c})$$

Aufgabe 6. Wir setzen die Axiome (E0), (E1), (E3) der Inzidenzgeometrie der Ebene voraus sowie die Axiome der Kongruenz und Zwischenbeziehung und das Lemma 7.7 - damit haben wir die Aussagen über die Anordnung auf Geraden.
Zeige: Das Parallelenaxiom ist äquivalent dazu, dass Stufenwinkel an Parallelen kongruent sind.

Lösung. Die Existenz von Parallelen folgt schon aus der Existenz und Eindeutigkeit der Lote. Es geht also nur um die Eindeutigkeit. Its die durch das Parallelenaxiom garantiert, so folgt die Kongruenz der Stufenwinkel (Satz 11.2). Seien umgekehrt h und h' Parallelen zu g durch B. Wähle A auf g und setze $l = A \vee B$. Wähle $R \in l \setminus [A, B]$ und $S \in g$, $T \in h$ und $T' \in h'$ in derselben Halbebene bzgl. l. Dann sind $\angle RAS$ und $\angle RBT$ sowie $\angle RAS$ und $\angle RBT'$ Paare von Stufenwinkeln, also nach Annahme Paare kongruenter Winkel. Also $\angle RBT \equiv \angle RBT'$. Da T und T' nicht durch l getrennt werden, folgt mit (5) aus 10.4 dass $h = h'$.