8. Übung Geometrie für Lehramt

Wir setzen die Axiome (E0), (E1), (E3) der Inzidenzgeometrie der Ebene voraus sowie die Axiome der Kongruenz und Zwischenbeziehung. Das Parallelenaxiom (E2) wird zunächst nicht vorausgesetzt, aber das Lemma 7.7 - damit haben wir die Aussagen über die Anordnung auf Geraden.

Mit "erläutern" ist eine Formulierung in der üblichen Sprechweise der Schulgeometrie gemeint.

Aufgabe 1. Seien A, B, C, C' 4 Punkte, keine 3 kollinear. Es gelte $AC \equiv AC'$ und $BC \equiv BC'$. Zeigen Sie: Es gibt $S \in (A\vee B) \cap]C, C'[$ und es gilt $A\vee B \perp C\vee C'$ und $SC \equiv SC'$

Lösung. S existiert nach (K9). $ABC \equiv ABC'$ nach (SSS), also

$$\angle CAS = \angle CAB \equiv \angle C'AB = \angle C'AS$$

Mit (SWS) folgt

$$CAS \equiv C'AS$$

Also $CS \equiv C'S$ und $A\vee B \perp C\vee C'$ nach (i) der Def.

Aufgabe 2. Führen Sie jede der folgenden Konstruktionen mit Zirkel und Lineal jeweils an einem Beispiel aus, erläutern Sie die Konstruktion und begründen Sie (aus den Axiomen, Definitionen und Sätzen), dass die Konstruktion das Gewünschte liefert, wenn sie erfolgreich durchgeführt wurde. Ist das Ergebnis eindeutig bestimmt? Begründen Sie auch, dass die Konstruktion immer erfolgreich durchgeführt werden kann.

1. Antragen des Winkels $\angle AOB$ an die Gerade g im Punkt O'
2. Fällen des Lotes von $P \notin g$ auf die Gerade g

Lösung. "Einstellen" des Zirkels auf AB heisst: die beiden Spitzen liegen auf A bzw. B.

1. Stelle Zirkel auf OA ein und schlage Kreise k um O und k' um O'. Markiere Schnittpunkte $B_1 = k \cap (\overrightarrow{O\vee B})$ und $A' = k' \cap g$. Stelle Zirkel auf AB_1 ein und schlage Kreis k_2 um A'. Markiere Schnittpunkt $B' = k_2 \cap k'$. Dann $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$

   Begründung: Nach Konstruktion gilt

   $$OA \equiv OB_1 \equiv O'A' \equiv O'B', \quad AB \equiv A'B'$$

   also

   $$\angle AOB = \angle AOB_1 \equiv \angle A'O'B'.$$

   Ausführbarkeit: Nach (K4) und (Z3) existiert B_1 und ist eindeutig bestimmt. Nach (K4) existiert A' - allerdings hat man die Wahl, auf welcher Halbgeraden. Daher ist das Ergebnis nicht eindeutig. Nach (K7) existiert B' - wieder nicht eindeutig.

2. Wähle $P \in g$ und stelle Zirkel auf QP ein. Schlage Kreis k um Q und markiere Schnittpunkt $P' \neq P$ - falls es den nicht gibt, wähle neues P und beginne von vorn. Schlage Kreise k_1 um P und k_2 um P'. Markiere $Q' \in k_1 \cap k_2$ mit $Q \neq Q'$. Zeichne $h = Q \vee Q'$. Das ist das gesuchte Lot.

   Begründung: Nach Konstruktion

   $$QP \equiv QP' \equiv Q'P \equiv Q'P'$$

   Nach (SWS) und (SSS) gilt

   $$P'QP \equiv PQP' \equiv PQ'P \equiv P'Q'P$$

   Nach (K9) trennt g die Punkte P und P', d.h. es gibt $S \in g$ mit $S \in]P, P'[$. Mit (SWS) folgt $PQS \equiv P'QS$ Also $SP \equiv SP'$. Nach Def. (i) der Orthogonalität gilt $g \perp h$. Nach Symmetrie $h \perp g$.

   Eindeutigkeit und Ausführbarkeit: Nach Satz 10.7 existiert h und ist eindeutig bestimmt. Insbesondere gibt es $S = g \cap h$. Nach (K4) gibt es Q' auf h mit $QS \equiv Q'S$. Und mit (SWS) folgt

   $$PSQ \equiv PSSQ \equiv PSQ' \equiv P'SQ'$$

   Also kann man Q' und h mit oben skizzierten Vorgehen bestimmen. Dies ist aber ein Argument a posteriori. Dagegen ist beim Vorgehen wie im Skript die Existenz a priori gesichert.

Aufgabe 3. Sei ABC ein Dreieck mit $AB \equiv BC$ und $D \in A \vee C$ mit $AD \equiv DC$. Leiten Sie her, dass gilt

$$ABD \equiv CBD, \quad D \in]A, C[\text{ und } B \vee D \perp A \vee C$$

Lösung. $ABD \equiv CBD$ nach Definition durch (SSS). Es gilt $D \in]A, C[$ nach (K5), also sind $\angle ADB$ und $\angle CDB$ Nebenwinkel. Da (WWW) aus (SSS) folgt, sind sie kongruent und somit $B \vee D \perp A \vee C$ nach Definition.

Aufgabe 4. Für ein Dreieck ABC und einen Punkt $D \in A \vee C$ betrachten wir die Bedingungen

(1) $AD \equiv DC$

(2) $\angle ABD \equiv \angle CBD$

(3) $B \vee D \perp A \vee C$

Erläutern Sie die folgende Aussage und leiten Sie her: Für jedes Dreieck ABC sind die folgenden Aussagen äquivalent

(a) $AB \equiv BC$

(b) Für jeden Punkt $D \in A \vee C$ sind die Bedingungen (1),(2) und (3) äquivalent

(c) Es gibt einen Punkt $D \in A \vee C$, der (3) und mindestens eine der Bedingungen (1),(2) erfüllt

(d) $\angle BAC \equiv \angle BCA$

Lösung. In gleichschenkligen Dreiecken, stimmen Seitenhalbierende, Höhe und Winkelhalbierende (bzgl. der Basis) überein. Stimmt die Höhe mit der Winkel- oder der Seitenhalbierenden überein, so ist das Dreieck gleichschenklig. Ein Dreieck ist gleichschenklig genau dann, wenn die Basiswinkel kongruent sind.

$(a) \Rightarrow (b)$: Sei $AB \equiv BC$ und $D \in A \vee C$. Aus (1) folgen (2) und (3) nach der vorhergehenden Aufgabe. Gilt (2) so $ABD \equiv CBD$ nach (SWS). Gilt (3) so, $AD \equiv BD$ nach Def. (iii) der Orthogonalität. Also sind unter der Voraussetzung (a) für jedes $D \in A \vee C$ die Aussagen (1),(2) und (3) äquivalent, d.h. es gilt (b).

$(b) \Rightarrow (c)$. Nach dem Satz vom Mittelpunkt gibt es $D \in]A, C[$ mit $AD \equiv DC$, d.h. (1) gibt. Nach (b) gelten dann auch (2) und (3) Somit gilt (c).

$(c) \Rightarrow (d)$. Gelte (3). Dann $ADB \equiv CDB$ nach (SWS) falls (1), nach (WSW) falls (2) gilt.

$(d) \Rightarrow (a)$. Mit (WSW) folgt $BAC \equiv BCA$. Oder wähle D als den Fußpunkt des Lotes von B auf $A \vee C$. Dann $ADB \equiv CBD$ nach (WSW).

Aufgabe 5. Fortsetzung von Aufgabe 2:

3. Errichten der Senkrechten auf g durch $P \in g$.

4. Errichten der Mittelsenkrechten auf der Strecke AB (ohne Begründung der Ausführbarkeit)

5. Bestimmung der Winkelhalbierenden von $\angle AOB$

Lösung.

3. Wähle $Q \neq P$ auf g. Stelle Zirkel auf PQ ein und schlage Kreis k um P. Markiere $Q \neq Q' \in K \cap g$. Stelle Zirkel auf QQ' ein und schlage Kreis k_1 um Q, k_2 um Q'. Markiere Punkt $R \in k_1 \cap k_2$ und zeichne $h = R \vee P$. Das ist die gesuchte Senkrechte in P auf g

   Begründung: Nach Konstruktion gilt

   $$QQ' \equiv QR \equiv Q'R \text{ und } PQ \equiv PQ'$$

   also nach Aufgabe 3 und (SWS)

   $$\angle RQP \equiv \angle RQ'P \text{ und } RQP \equiv PQP'$$

   Also nach Def. (i) $h \perp g$.

   Eindeutigkeit und Ausführbarkeit: Nach Satz 10.7 existiert h und ist eindeutig bestimmt. Nach (K4) existiere Q und Q' auf g und dann (nicht eindeutig $R \in h$. Mit (SWS) folgt $RPQ \equiv RPQ'$, also kann man R wie angegeben konstruieren. Man kann aber auch wie im Skript vorgehen. Die Bemerkung zu 2. gilt entsprechend.

4. Stelle Zirkel auf AB ein und schlage Kreis k_1 um A und k_2 um B. Markiere $C \neq C'$ in $k_1 \cap k_2$. Zeichne $h = C \vee C'$. Das ist die gesuchte Mittelsenkrechte.

   Begründung: nach (SSS) gilt

   $$CAB \equiv CBA \equiv C'AB \equiv C'BA$$

   Nach (K9) gibt es $S = g \cap h$, $S \in]A, B[$, und mit (SWS) folgt

   $$CAS \equiv C'AS$$

   Also $g \perp h$ und $h \perp g$ mit Symmetrie.

   Eindeutigkeit und Ausführbarkeit: Existenz und Eindeutigkeit von h und S mit $SA \equiv SB$ folgt aus Satz 10.9. Aber: Wie soll man Existenz von C und C' beweisen?

5. Stelle Zirkel auf OA ein und schlage Kreis k um O. Markiere Schnittpunkt $B' = k \cap \overrightarrow{O \vee B}$. Schlage Kreis k_1 um A und k_2 um B. Markiere $C \in k_1 \cap k_2$, $C \neq O$. Zeichne $h = O \vee C$. Das ist die gesuchte Winkelhalbierende.

   Begründung: Mit $C' = O$ und $g = A \vee B'$ folgt wie zu 4. $S = g \cap h \in]A, B'[$ und $h \perp A \vee B'$. Wegen $AO \equiv OB'$ folgt mit Def. (iii) $SA \equiv SB'$. Nun mit (WSW) $OSA \equiv OSB'$ und daraus $\angle AOS \equiv \angle B'OS = \angle BOS$.

   Existenz von $C \neq O$ mit $ABC \equiv ABO$ folgt nach (K7), also kann man C wie angegeben konstruieren. Eindeutigkeit: Ist h' eine Winkelhalbierende, so muss h' die Gerade $A \vee B'$ in $S' \in]A, B'[$ schneiden. Ausserden muss $\angle OS'A \equiv \angle OS'B'$ gelten. Mit (WSW) folgt $OS'A \equiv OS'B$, also $O \vee S' \perp A \vee B$. Somit $h' = h$ nach der Eindeutigkeit des Lotes.