7. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1. Betrachte eine Kugel im Anschauungsraum und erinnere Dich an Aufgabe 1 der 1. Übung. In der *sphärischen Geometrie* besteht die Punktmenge aus den Punkten der Kugeloberfläche und die "Geraden" sind die Großkreise - Kreise, für die Zentrum und Radius mit dem der Kugel übereinstimmt. Welche Axiome der Zwischenrelation bzw. welche Kongruenzaxiome (siehe unten) sind in diesem Modell erfüllt?

Lösung.

- Es gilt $(Z0)$.
- Die anderen Axiome sind Definitionen.

Kongruenzaxiome Als neuen Grundbegriff führen wir die *Kongruenz* $PQ \equiv RS$ von Pfeilen ein - wir sagen auch die *Strecken* PQ und RS sind *kongruent*.

$(K1)$ $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Pfeile

$(K2)$ $AB \equiv BA$

$(K3)$ Aus $AA \equiv BC$ folgt $B = C$

$(K4)$ Zu Punkten $A \neq B$ und C und Gerade g durch C gibt es genau 2 Punkte D, D' mit $AB \equiv CD \equiv CD'$

$(K5)$ Sind A, B, C 3 kollineare Punkte mit $AB \equiv AC$ so $A \in]B, C[$

$(K6)$ Sind A, B, C bzw. A', B', C' jeweils 3 kollineare Punkte mit $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ und $B \in]A, C[\Leftrightarrow B' \in]A', C'[$, so gilt $AC \equiv A'C'$

$(K7)$ Zu jedem Dreieck ABC und Punkten A', B' mit $AB \equiv A'B'$ gibt es 2 Punkte C', C'' mit $AC \equiv A'C' \equiv A'C''$ und $BC \equiv B'C' \equiv B'C''$

$(K8)$ Für jedes Dreieck ABC und Punkte D, A', B', C, D' mit $D \in A \vee C$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $AC \equiv A'C'$, $AD \equiv A'D'$ und $BD \equiv B'D'$ gilt $CD \equiv C'D'$

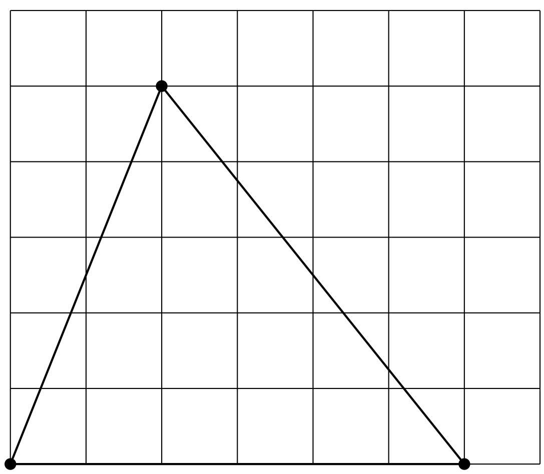
$(K9)$ Sind 4 Punkte mit $AC \equiv AC'$ und $BC = BC'$ gegeben, so trennt die Gerade $A \vee B$ die Punkte C und C'

Aufgabe 2. Wir wissen, wie man geometrisch multipliziert. Wähle eine Zahlengerade und konstruiere auf dieser durch fortlaufende Halbierung die ersten drei Intervalle einer rationalen Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ so, dass jedes $x > 0$ mit $x^2 = 2$ durch diese approximiert wird. Wie ist die Annahme zu rechtfertigen, dass es mindestens ein bzw. höchstens ein $x > 0$ mit $x^2 = 2$ gibt?

Lösung. $[1, 2], [1, \frac{3}{2}], [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$, *etc.* Wegen Vollständigkeit, die Cauchy Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Außerdem $(b_n - a_n) \leq \frac{1}{2^n}$. Es folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben denselben Grenzwert.

Aufgabe 3. Seien drei Punkte A, B und C in der Euklidischen Ebene, deren Koordinaten $(0, 0)$, $(6, 0)$ und $(2, 5)$ sind.

- Sei Q, deren Koordinaten $(3,2)$ sind. Ist Q von $KH(\{A,B,C\})$?
- Bestimme die Koordinaten (x,y) der Punkte von $KH(\{A,B,C\})$.
- Sei $\vec{v}$, deren Koordinaten $(1,1)$ sind. Bestimme die Skalare r, sodass $r\vec{v}+Q$ von $KH(\{A,B,C\})$ ist.



Lösung.

- $y=0$ (bzw. $5x-2y=0$, bzw. $5x+4y=30$) ist eine Darstellung für $A \vee B$ (bzw. $A \vee C$, bzw. $B \vee C$). Die Konvexe Hülle $KH(\{A,B,C\})$ ist die Schnittmenge drei Halbebenen, deren Darstellung $0 \leq y$, $2y \leq 5x$ und $5x+4y \leq 30$ sind. Es folgt, dass die Darstellung der Konvex Hülle ist die Konjunction der vorigen Ungleichungen.
- Aus $0 \leq 2$, $2*2 \leq 5*3$ und $5*3+4*2 \leq 30$ folgt, dass Q ist von $KH(\{A,B,C\})$.
- Die Koordinaten von $r\vec{v}+Q$ sind $(3+r, 2+r)$. Somit

$$r\vec{v}+Q \in KH(\{A,B,C\}) \Leftrightarrow 0 \leq 2+r \wedge 2(2+r) \leq 5(3+r) \wedge 5(3+r)+4(2+r) \leq 30$$

$$r\vec{v}+Q \in KH(\{A,B,C\}) \Leftrightarrow -2 \leq r \wedge \frac{-11}{3} \leq r \wedge r \leq \frac{7}{9}$$

$$r\vec{v}+Q \in KH(\{A,B,C\}) \Leftrightarrow -2 \leq r \leq \frac{7}{9}$$

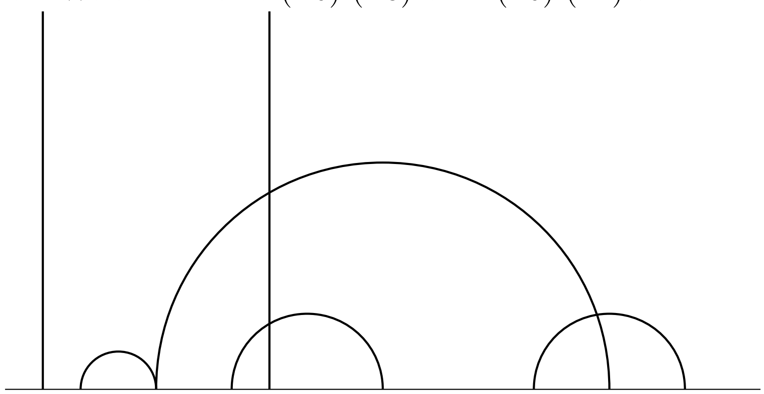
Aufgabe 4. Illustriere durch eine Skizze zur geometrischen Multiplikation auf der Zahlengeraden, dass

$$r \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} \to 0 \qquad \text{für } r > 0$$

Welches praktische Problem tritt bei der Inversion sehr kleiner oder sehr großer Skalare auf?

Lösung.

Aufgabe 5. Jetzt beschäftigen wir uns mit dem Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie. Betrachte die Anschauungsebene und erinnere Dich, was *senkrecht* bedeutet und was ein *Kreis* ist. Sei g_0 eine Gerade und H eine dazugehörige Halbebene. Die Punkte Poincaré-Modells sind die Punkte von H. Die "Geraden" des Poincaré-Modells sind die zu g_0 senkrechten Halbgeraden in H sowie die Halbkreise in H, die ihr Zentrum auf g_0 haben. Welche Axiome (E0)-(E3) bzw. (Z0)-(Z4) sind in diesem Modell erfüllt?



Lösung. Angenommen, dass die Kreise am mindesten zwei Punkte haben.

Es gilt $(E0)$, $(E1)$ und $(E3)$. Es gilt nicht $(E2)$. Zu jeder Gerade und durch jeden Punkt, der nicht auf dieser Gerade liegt, gibt unendliche Parallele.