1 Grundeigenschaften

Definition 1.1. Eine Punktmenge C in einem Anordnungsraum heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten a, b die abgeschlossene Strecke $[a, b]$ ganz enthält.

Beispiele: $\emptyset$, die Einecke $\{x\}$, die Strahlen ax^+, die offenen abgeschlossenen Halbräume H^+ und $\hat{H}^+$ sind konvex.

Beobachtung 1.2. Der Durchschnitt beliebig (auch unendlich) vieler konvexer Mengen ist konvex.

Definition 1.3. Die *konvexe Hülle* $\mathrm{conv}M$ einer Punktmenge M ist der Durchschnitt aller M enthaltenden konvexen Mengen (also konvex). Offenbar gilt stets

$$M \subseteq \mathrm{conv}M \subseteq \overline{M}\,, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{conv}\,\mathrm{conv}M = \mathrm{conv}M\,, \tag{1.2}$$

$$A \subseteq \mathrm{conv}B \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{conv}A \subset \mathrm{conv}B\,. \tag{1.3}$$

Z.B. ist $\mathrm{conv}\emptyset = \emptyset$, $\mathrm{conv}\{a, b\} = [a, b]$.

Hilfssatz 1.4. *Ist $x \in \mathrm{conv}M$, so gibt es eine endliche Teilmenge $M_0 \subseteq M$ mit $x \in \mathrm{conv}M_0$.*

Beweis. Die Vereinigung der konvexen Hülle endlicher Teilmengen von M ist offenbar konvex. □

Hilfssatz 1.5. *Ist A eine konvexe Menge und weder leer noch ein Eineck, sowie p ein Punkt, so ist $\mathrm{conv}(A \cup \{p\})$ die Vereinigung W aller Strecken $[p, x]$ mit $x \in A$.*

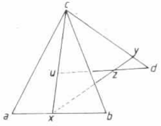
Beweis. Zu zeigen ist, daß W konvex ist, und das ergibt sich leicht durch höchstens zweimaliges Anwenden von (PA). □

Hilfssatz 1.6. *a, b, c, d seien vier Punkte und*

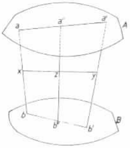
$$C = \mathrm{conv}\{a, b, c, d\}\,. \tag{1.4}$$

Dann ist C die Vereinigung aller Strecken $[x, y]$ mit $x \in [a, b]$ und $y \in [c, d]$.

Beweis. Fall 1: Einer der vier Punkte liegt in der konvexen Hülle der anderen, o.B.d.A. $C = \mathrm{conv}\{a, b, c\}$. Dann ist C nach Hilfssatz 1.5 die Vereinigung aller Strecken $[c, x]$ mit $x \in [a, b]$, und wir sind fertig.



Fall 2: Es sei $d \notin \mathrm{conv}\{a, b, c\}$. Nach Hilfssatz 1.5 liegt jeder Punkt $z \in C$ auf eine Strecke $[d, u]$ mit $u \in \mathrm{conv}\{a, b, c\}$. Dabei ist $\mathrm{conv}\{a, b, c\}$ ein Dreieck, weil sonst Fall 1 vorläge. Im Fall $u = c$ wären wir fertig. Anderenfalls liegt u auf einer Strecke $[c, x]$ mit $x \in [a, b]$. Nach (PA), angewandt auf das Tripel $\{c, d, u\}$, schneiden sich $[c, d]$ und $\overline{xz}$ in einem Punkt y, und nach (PA) für $\{c, x, y\}$ liegt z zwischen x und y. □



Folgerung 1.7. Sind $A, B \neq \emptyset$ zwei konvexe Mengen, so ist $\operatorname{conv}(A \cup B)$ die Vereinigung W aller Strecken $[a, b]$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß W konvex ist, also

(!) Aus $x \in [a, b]$ und $y \in [a', b']$ mit $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$, sowie $z \in [x, y]$ folgt $z \in W$.

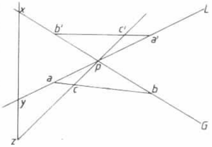
Aber dies folgt aus Hilfssatz 1.6 (s. Figur). □

2 Die Lokalräume

Im folgenden sei C stets eine nichtleere konvexe Menge und $p \in C$.

Definition 2.1. Der *Lokalraum* $S(p)$, ausführlich $S(p, C)$, ist die Vereinigung aller Geraden L, für welche p zwischen zwei Punkten aus $L \cap C$ liegt. Die Menge dieser Geraden sei mit $\mathscr{S}(p)$ bzw. $\mathscr{S}(p, C)$ abgekürzt. Im Fall $\mathscr{S}(p) = \emptyset$ definieren wir zusätzlich $S(p) := \{p\}$.

Beobachtung 2.2. Der Lokalraum ist ein Unterraum.



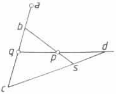
Beweis. Es seien G und L zwei Geraden aus $\mathscr{S}(p)$, ferner $x \in G \setminus \{p\}$ und $y \in L \setminus \{p\}$, sowie $z \in \overline{xy}$, etwa $a, a' \in L \cap C$ mit $(apa') = -1$ und $b, b' \in G \cap C$ mit $(bpb') = -1$. O.B.d.A. liegen a und b' auf derselben Seite von $\overline{pz}$, ebenso a' und b. Dann existieren $c = \overline{pz} \cap]a, b[$ und $c' = \overline{pz} \cap]a', b'[$. Offenbar liegen c und c' in C und auf verschiedenen Seiten von G. Es folgt $(cpc') = -1$, also $\overline{pz} \in \mathscr{S}(p)$. □

Definition 2.3. Der Punkt p heißt ein

interner Punkt[1] (von C),	wenn $S(p) = V$,
Endpunkt,	wenn $S(p) \subset V$, insbesondere
extremer Punkt oder *Ecke*,	wenn $S(p) = \{p\}$,
relativ interner Punkt,	wenn $S(p) = \overline{C}$,
relativer Endpunkt,	wenn $S(p) \subset \overline{C}$ ist.

Hilfssatz 2.4. *Es gilt (für Punkte $p, q \in C$)*

$$q \in S(p) \cap C \iff S(q) \subseteq S(p). \tag{2.1}$$



Beweis. I. $S(q)$ ist nur für $q \in C$ definiert. Aus $S(q) \subseteq S(p)$ folgt daher $q \in S(p) \cap C$.

II. Nun sei $q \in S(q) \setminus S(p)$. Angenommen, es gäbe einen Punkt $a \in S(q) \setminus S(p)$, und es seien etwa $b, c, d \in C$ Punkte mit $(abq) = (bqc) = (qpd) = -1$. Dann existiert $s =]c, d[\cap \overline{pb}$ und es ist $(bps) = -1$, also $\overline{bp} \in \mathscr{S}(p)$, $b \in S(p)$, $a \in \overline{qp} \subseteq S(p)$, Widerspruch. □

[1] bei VALENTINE [13] *Kornpunkt*.