6. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Im folgenden betrachten wir Raum bzw. Ebene mit allen Axiomen (E1-6) und (Z1-4). Bei (Z4) ist eine Voraussetzung nicht festgehalten worden: das Dreieck und die Gerade müssen in einer Ebene liegen!

Aufgabe 1. Gegeben ein Dreieck A, B, C, ein Punkt $P \in]A, B[$ und die Parallele h zu $g = A \vee B$ durch durch P. Wo liegt der Schnittpunkt h mit $A \vee C$ und warum?

Aufgabe 2. Gegeben vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, P auf einer Geraden l. Zeige

Gilt $P \in]A, B[$ und $P \in]B, C[$ so gilt $P \notin]A, C[$

Hinweis: Wähle $S \notin l$ und zeichne eine Figur, die der Voraussetzung entspricht.

Lösung. (a) Wähle $S \notin l$. Sei $g = B \vee S$ und $P \in h \parallel g$. Pasch für ABS und $P = h \cap]A, B[$ ergibt $Q = h \cap]A, S[$. Pasch für BCS und $P = h \cap]B, C[$ ergibt $R = h \cap]C, S[$. Also werden im Dreieck ACS sowohl $]A, S[$ wie auch $]C, S[$ von h im Inneren geschnitten. Nach Pasch, kann h nicht auch noch $]A, C[$ im Inneren schneiden, also $P = h \cap l \notin]A, C[$.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Menge M in der Ebene. Die folgende Definition ergänzt die Menge M um alle Punkte, die zwischen alle zwei Punkten von M liegen

$$Z(M) \stackrel{def}{=} \bigcup_{P,Q \in M} [P, Q]$$

1. Begründe $M \subseteq Z(M)$ für alle M.
2. Sei PQR eine Dreieck. Bestimme $Z(\{P\})$, $Z(\{P, Q\})$, $Z(\{P, Q, R\})$ und $Z([P, Q])$.
3. Zeichne das Bild $Z(M)$ für die Figuren a-f.
4. Ist $Z(M)$ immer konvex? Bestimme $Z(M)$, wenn M konvex ist.
5. Begründe: M ist konvex genau dann, wenn $Z(M) = M$.

   Wir haben nun gesehen, dass $Z(M)$ nicht immer konvex ist, d.h. dass ein Schritt im Allgemeinen nicht genügt. Also wenden wir Z zweimal an

$$Z^2(M) = Z(Z(M)) = (Z \circ Z)(M)$$

6. Zeichne die Bilder $Z^2(M)$ der Figuren a-f. Welche sehen konvex aus?
7. Begründe $M \subseteq Z^2(M)$ für alle M.
8. Vergleiche $Z^2(M)$ und $Z^2(M')$ falls $M \subseteq M'$.
9. Begründe $Z^2(M) = M$ für konvexe M
10. Seien M eine Menge und KO eine konvexe Obermenge. Begründe $Z^2(M) \subseteq KO$.
11. Ist $Z^2(M)$ immer konvex, falls M eine Teilmenge des Raumes ist?

12. In der Vorlesung wurde die *konvexe Hülle* $KH(M)$ von M als die Vereinigung aller $Z^n(M)$ definiert und gezeigt, dass sie die kleinste konvexe Menge ist, die M enthält. Wurden dabei spezifisch geometrische Tatsachen und Argumente benötigt? Kennt Ihr ähnliche Begriffe und Ergebnisse?

13. Ist $P \in KH(M)$, so gibt es immer eine endliche Teilmenge M' von M mit $P \in KH(M')$.

    (a) Welche Argumente dienen zum Beweis? Illustriere durch Skizzen.

    (b) Inwiefern ist dieses Faktum von Nutzen, wenn man für die Ebene $KH(M) = Z^2(M)$ zeigen möchte?

Lösung. $M \in \mathcal{K}$ heisst: M is konvex

1. Sei M eine Menge und $P \in M$. Wegen $P \in [P, P]$, folgt $P \in Z(M)$.

2.
   - $Z(\{P\}) = P$.
   - $Z(\{P, Q\}) = \bigcup_{R,S\in\{P,Q\}}[R, S] = [P, P] \cup [Q, Q] \cup [P, Q] \cup [Q, P] = [P, Q]$
   - $Z(\{P, Q, R\}) = \bigcup_{S,T\in\{P,Q,R\}}[S, T] = [P, Q] \cup [Q, R] \cup [R, P]$.
   - Seien R und S zwei Punkte von $[P, Q]$. Wir wollen $[R, S] \subseteq [P, Q]$ beweisen. Wegen Aufgabe 2, liegt S entweder auf $[P, R]$ oder auf $[R, Q]$. Die Fälle sind ähnlich, deshalb betrachten wir z.B. den Fall $S \in [P, R]$. Es gilt $[R, S] \subseteq [P, R]$ und $[P, R] \subseteq [P, Q]$ wegen Aufgabe 3. Daraus folgt $[R, S] \subseteq [P, Q]$.

3. Kein Beweis.

4. $Z(\{P, Q, R\})$ ist nicht konvex. Seien M eine konvexe Menge und $P \in Z(M)$. Wegen der Definition von Z, es gibt $R, S \in M$, sodass $P \in [R, S]$. Es folgt, dass P auch auf M liegt, weil M konvex ist.

5. Oben haben wir $M \in \mathcal{K} \Rightarrow Z(M) \subseteq M$ bewiesen. Außerdem wissen wir schon, dass $M \subseteq Z(M)$ für alle M. Es folgt $M \in \mathcal{K} \Rightarrow Z(M) = M$. Umgekehrt seien M, sodass $Z(M) \subseteq M$, und $P, Q \in M$. Wegen der Definition von Z, gilt $[P, Q] \subseteq Z(M)$, und dann $[P, Q] \subseteq M$.

6. Sei $Z^2 = Z \circ Z$. Zeichnet das Bild von Z^2 der Figuren a-f.

7. Sei M eine Menge. $M \subseteq Z(M)$ und $Z(M) \subseteq Z(Z(M))$ wegen einer obigen Frage. Daraus folgt $M \subseteq Z(Z(M)) = Z^2(M)$.

8. Angenommen $M \subseteq M'$. Es gilt $Z(M) = \bigcup_{P,Q\in M}[P, Q] \subseteq \bigcup_{P,Q\in M'}[P, Q] = Z(M')$. Wir anwenden diese Eigenschaft auf $Z(M) \subseteq Z(M')$. Es folgt $Z \circ Z(M) \subseteq Z \circ Z(M')$.

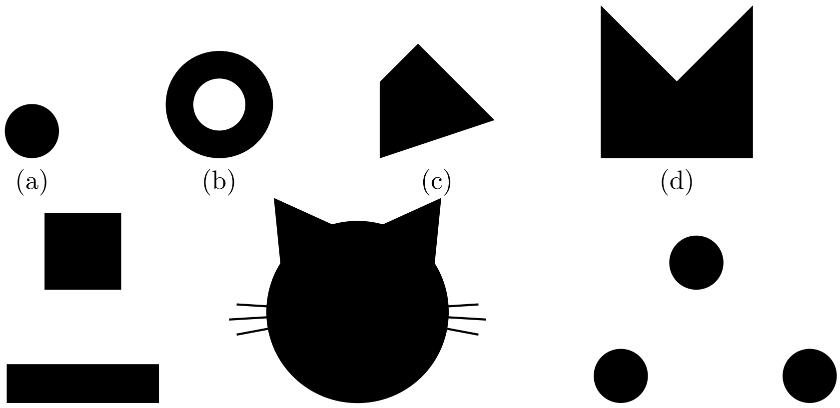
9. Wenn M konvex , folgt $Z^2(M) = Z(Z(M)) = Z(M) = M$ wegen einer obigen Frage.

10. klar

11. nein, man erhält nur die Seitenflächen des Simplex

12. nein, alles nur triviales Gelaber

13. Wenn P in der Vereinigung der $Z^n(M)$ ist, dann scoh in einem $Z^n(M)$. Also zeigt man $P \in Z^n(M) \Rightarrow P \in Z^n(M')$ für ein endliches $M' \subseteq M$ durch Induktion über n. Die Nützlichkeit liegt darin, dass man aus M' nach und nach nicht benötigte Elemente entfernen kann, also mit Ordnungsinduktion argumentieren kann.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

Aufgabe 4.

1. Sei M eine konvexe Menge und $\vec{v}$ ein Vektor. Zeige, dass auch $\{\vec{v} + P \mid P \in M\}$ konvex ist.

2. Sei M eine konvexe Menge und $O \in M$. Zeige dass auch $\{2\vec{v} + O \mid \vec{v} + O \in M\}$ konvex ist.

Lösung

1. Seien $Q_1 = \vec{v} + P_i$ mit $P_i \in M$ und $Q = r\vec{v} + Q_1$ mit $Q_2 = \vec{v} + Q_1$ und $0 \leq r \leq 1$. Dann $P_2 = \vec{v} + P_1$ und $P = r\vec{v} + P_1 \in M$, da M konvex. Nun $Q = \vec{v} + P$.

2. Seien $P_i = \vec{v}_i + O \in M$ und $Q \in [Q_1, Q_2]$ mit $Q_i = 2\vec{v}_i + O$. Dann $Q = r\vec{w} + Q_1$ mit $Q_2 = \vec{w} + Q_1$. Sei $P_2 = \vec{v} + P_1$, also $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Da M konvex ist, ist $P = 2\vec{v} + P_1 \in M$. Und $P = \vec{p} + O$ mit $\vec{p} = r(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \vec{v}_1$. Nach dem Strahlensatz gilt $\vec{w} = 2\vec{v}$ und somit $Q = r\vec{w} + 2\vec{v}_1 + O = 2r(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + 2\vec{v}_1 + O = 2\vec{p} + O$.

Aufgabe 5. Zeige

1. Ist M konvex, so gilt $KH(M \cup \{A\}) = Z(M \cup \{A\})$

2. $KH(\{A, B, C, D\} = Z([A, B] \cup [C, D])$

3. Zeige: $KH(M \cup M') = Z(M \cup M'$ falls M und M' konvex sind.

Lösung

1. Hilfssatz 1.5

2. Hilfssatz 1.6

3. Folgerung 1.7

Aufgabe 6. Eine Menge M heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $P_0 \in M$ so gibt, dass $[P_0, P] \subseteq M$ für alle $P \in M$. Gib einen direkten Beweis dafür, dass für eine sternförmige Menge M in der Ebene die konvexe Hülle $KH(M)$ sich als $Z^2(M)$ ergibt.