5. Übung zur Geometrie für Lehramt   TUD SS 2010

Aufgabe 1. Seien zwei beliebige verschiedene Punkte P und Q. Wir wollen beweisen, dass es zwischen P und Q einen Punkt gibt.

1. Sei R ein dritter Punkt auf $P \vee Q$. Welche Fälle müssen wir betrachten?
2. Angenommen $Q \in]P, R[$, sei S ein Punkt, der nicht auf $P \vee Q$ liegt. Zeigt, dass es einen Punkt zwischen P und S gibt.
3. Zeigt, dass es einen Punkt zwischen P und Q gibt.

Lösung.

1. Wenn R zwischen P und Q liegt, ist der Beweis fertig. Wir müssen beide folgenden Fälle betrachten, wenn P zwischen R und Q liegt und Q zwischen R und P liegt.
2. Die Parallel zu $R \vee S$ durch Q schneidet $]P, R[$ aber nicht $[R, S]$ wegen die Parallelität. Daraus folgt, dass diese Gerade $]P, S[$ schneidet. Somit gibt es einen Punkt T zwischen P und S.
3. Gleicherweise schneidet $]P, Q[$ die Parallele zu $S \vee Q$ durch T. Somit gibt es einen Punkt zwischen P und Q.

Aufgabe 2. Seien A, B und C drei Punkte, sodass $B \in]A, C[$.

1. Zeigt $]A, C[\subseteq]A, B[\cup \{B\} \cup]B, C[$. (Hinweis: Betracht einen Punkt D, der nicht auf $A \vee C$ liegt, und Parallelen zu $B \vee D$.)
2. Zeigt $]A, B[\cup]B, C[\subset]A, C[$. (Hinweis: man kann benutzen eine Hilfszahlengerade und die Eigenschaften des anordnet Körper.)
3. Was folgt daraus?

Lösung.

1. Sei P ein Punkt von $]A, C[$. Wenn $P = B$, folgt $P \in]A, B[\cup \{B\} \cup]B, C[$. Angenommen $P \neq B$. Sei D ein Punkt, der nicht auf $A \vee C$ liegt. Sei g die Parallele zu $B \vee D$ durch P. Wegen des Pasch Axioms, muss g entweder $]A, D[$ oder $]C, D[$ schneiden. Sei X gleich A oder D, sodass g schneidet $]X, D[$. Also, X, B, D ist ein Dreieck und g schneidet $]X, D[$. Wegen des Pasch Axioms, schneidet g die Strecke $]X, B[$, weil g parallel zu und verschieden von $D \vee B$ ist. Aber $]X, B[$ ist eine Teilmenge von $A \vee C$ und $g \cap (A \vee C) = \{P\}$ wegen der Beschreibung von g, so liegt P auf $]X, B[$. Somit $P \in]A, B[\cup]B, C[$. Wir können darauf schließen, dass $]A, C[\subseteq]A, B[\cup \{B\} \cup]B, C[$.
2. Wir werden diese Frage später antworten.
3. $]A, C[=]A, B[\cup \{B\} \cup]B, C[$

Aufgabe 3.

1. Seien P, Q und R drei beliebige Punkte der Ebene und eine Gerade g, die $[P, Q]$ schneidet. Zeigen, dass g auch $[P, R]$ oder $[Q, R]$ schneidet.

2. Seien eine natürliche Zahl n größer oder gleich 3, n Punkte $(P_i)_{0\leq i\leq n-1}$ und eine Gerade g, die eine Strecke $[P_k, P_{k+1\, mod\, n}]$ schneidet. Zeigt, dass es eine Zahl l gibt, sodass $l \neq k$ und g auch die Strecke $[P_l, P_{l+1\, mod\, n}]$ schneidet. (Hinweis: durch Induktion in Verhältnis zu n.)

Lösung.

1. Wenn $R = Q$ oder $R = P$, dann $[P, Q] = [P, R]$ oder $[P, Q] = [Q, R]$, und der Beweis ist fertig. Angenommen $R \neq P$ und $R \neq Q$. Wenn $P \in g$ oder $Q \in g$, schneidet g $[P, R]$ oder $[Q, R]$, und der Beweis ist fertig. Angenommen, dass g schneidet $]P, Q[$. Daraus folgt $P \neq Q$. Wenn P, Q, R ein Dreieck ist, folgt der Beweis aus dem Pasch Axiom. Angenommen P, Q, R kein Dreieck ist. Es gilt, dass P, Q und R drei verschiedene kollinear Punkte sind. Man benutzt Augabe 2, um den Beweis zu ergänzen.

2. Die Eigenschaft, die wir für alle n beweisen wollen, ist zufrieden für $n = 3$, wegen der ersten Frage. Angenommen, dass sie bis eine beliebige Zahl $n \geq 3$ zufrieden ist. (Wir wollen zeigen, dass sie auch für $n+1$ zufrieden ist. Dann können wir schließen.) Seien $n + 1$ Punkte $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ und eine Gerade g, die eine Strecke $[P_k, P_{k+1\, mod\, n+1}]$ schneidet. Wenn g auch $[P_{k+1\, mod\, n+1}, P_{k+2\, mod\, n+1}]$ schneidet, ist der Beweis fertig. Angenommen, dass g nicht $[P_{k+1\, mod\, n+1}, P_{k+2\, mod\, n+1}]$ schneidet. Wegen der ersten Frage, schneidet g die Strecke $[P_k, P_{k+2\, mod\, n+1}]$. Betracht die Punkte $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ ohne $P_{k+1\, mod\, n+1}$. Es geht um ein Polygon mit n Seiten, dessen eine Seite durch eine Gerade g geschnitten wird. Man kann nun die Induktion Hypothese benutzen. Es folgt, g schneidet eine andere Seite diesem Polygon. Diese Seite ist auch eine Seite des Polygon $(P_i)_{0\leq i\leq n}$, so kann man schließen.

Aufgabe 4. Betracht die affine Ebene. Eine konvexe Menge ist eine Menge M, sodass gegeben beliebige Punkte P und Q von M jeder Punkt zwischen P und Q auch ein Element von M ist. Formal gesagt, eine Menge M ist konvex falls die folgende Formel ist zufrieden:

$$\forall P, Q \in M,\ ]P, Q[\subseteq M$$

1. Gegeben zwei verschiedene Punkte P und Q, sind $\{P\}$, $\{P, Q\}$, $[P, Q]$ und $P \vee Q$ konvex?

2. Gibt es eine kleinste (bzw. großeste) konvexe Menge in der Ebene?

3. Ist die Vereinigungsmenge von zwei Geraden immer konvex?

4. Welche Mengen (in Schwarz) sind konvex in Figuren a-g?

5. Ist die Schnittmenge von zwei konvexe Menge immer konvex?

6. Sei I eine beliebige Menge (die muss nicht mit der Ebene etwas zu tun haben). Sei $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie aus konvexe Mengen. Ist $\bigcap_{i\in I} K_i$ konvex?

Lösung.

1.
   - Seien R und S von $\{P\}$. Es gilt $P = R = S$. Es folgt, dass $]R, S[=]P, P[= \emptyset \subseteq \{P\}$, somit ist $\{P\}$ konvex.

- $\{P, Q\}$ ist nicht konvex, weil es einen Punkt zwischen P und Q gibt, wegen Aufgabe 1.
- Seien R und S zwei Punkte von $[P, Q]$. Man will zeigen, dass $]R, S[\subseteq]P, Q[$ durch Aufgabe 2. Wenn $R = S$, folgt $]R, S[= \emptyset \subseteq]P, Q[$. Sonst z.B. aus $S \in]R, Q[$ folgt $]R, S[, \subseteq]R, Q[, \subseteq]P, Q[$.
- Seien R und S zwei Punkte auf $P \vee Q$ und ein Punkt T von $]R, S[$. Wegen der Definition der Zwischenrelation, sind die Punkte kollinear, so liegt T auch auf $P \vee Q$.

2. Die Leermenge und die Ebene.

3. Nein, z.B. zwei verschiedene Punkte.

4. a und c.

5. Sonderfall von nächste Frage/Antwort.

6. Seinen P und Q zwei Punkte von $\bigcap_{i \in I} K_i$. Für alle i von I gilt $P, Q \in K_i$, so $]P, Q[\subseteq K_i$, weil K_i konvex ist. Daraus folgt $]P, Q[\subseteq \bigcap_{i \in I} K_i$, wegen der Definition der Schnittmenge. Somit ist $\bigcap_{i \in I} K_i$ konvex.