4. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1. Im Raum seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ drei unabhängige Vektoren. Formal gesagt

$$\forall r, s, t \in K,\ r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow r = s = t = 0$$

In welchen den folgenden Fälle sind die Vektoren unabhängig? Schreibt einen Beweis.

- $\vec{a}$, $-\vec{b}$ und $-\vec{c}$.
- $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$.
- $u\vec{a}$, $u\vec{b}$ und $u\vec{c}$, gegeben einen beliebigen Skalar u.
- $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$.

Lösung.

- Seien Skalare x, y und z so, dass $x\vec{a}+y(-\vec{b})+z(-\vec{c}) = \vec{0}$, anders gesagt $x\vec{a}+(-y)\vec{b})+(-z)\vec{c}) = \vec{0}$. Wegen die unabhängigkeit von a, b und c, folgt $x = -y = -z = 0$, so $x = y = z = 0$. Somit sind $\vec{a}$, $-\vec{b}$ und $-\vec{c}$ auch unabhängig.
- Aus $1(\vec{a} - \vec{b}) + 1(\vec{b} - \vec{c}) + 1(\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0}$ folgt, dass $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, und $\vec{c} - \vec{a}$ abhängig sind.
- Angenommen $u = 0$, so $u\vec{a} = u\vec{b} = u\vec{c} = \vec{0}$, somit sind $u\vec{a}$, $u\vec{b}$ und $u\vec{c}$ abhängig. Angenommen, dass $u \neq 0$, seien Skalare x, y und z so, dass $x(u\vec{a})+y(u\vec{b})+z(u\vec{c}) = \vec{0}$. Anders geschrieben, $(xu)\vec{a}) + (yu)\vec{b}) + (zu)\vec{c}) = \vec{0}$. Wegen die unabhängigkeit von a, b und c, folgt $xu = yu = zu = 0$, so $x = y = z = 0$, weil $u \neq 0$. Somit sind $u\vec{a}$, $u\vec{b}$ und $u\vec{c}$ auch unabhängig.
- Seien Skalare x, y und z so, dass $x(\vec{a}+\vec{b})+y(\vec{a}-\vec{c})+z(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{0}$. Anders geschrieben $(x + y)\vec{a} + (x + z)\vec{b}) + (-y - z)\vec{c} = \vec{0}$. Wegen die unabhängigkeit von a, b und c, folgt $x + y = x + z = -y - z = 0$, so $x + y - (x + z) + (-y - z) = 0$. Aber $x + y - (x + z) + (-y - z) = -2z$, so $z = 0$. Es folgt, $x = y = 0$. Somit sind $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$ und $\vec{b} - \vec{c}$ auch unabhängig.

Aufgabe 2. In der folgenden Figur ist ein Koordinatensystem $\alpha = (O_\alpha, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ eingezeichnet

a) Bestimmt aus der Figur die Koordinaten $\vec{z}^\alpha$ des Vektors $\vec{z} = \overrightarrow{XY}$ und die Koordinaten X^α des Punktes X und Y^α des Punktes Y.

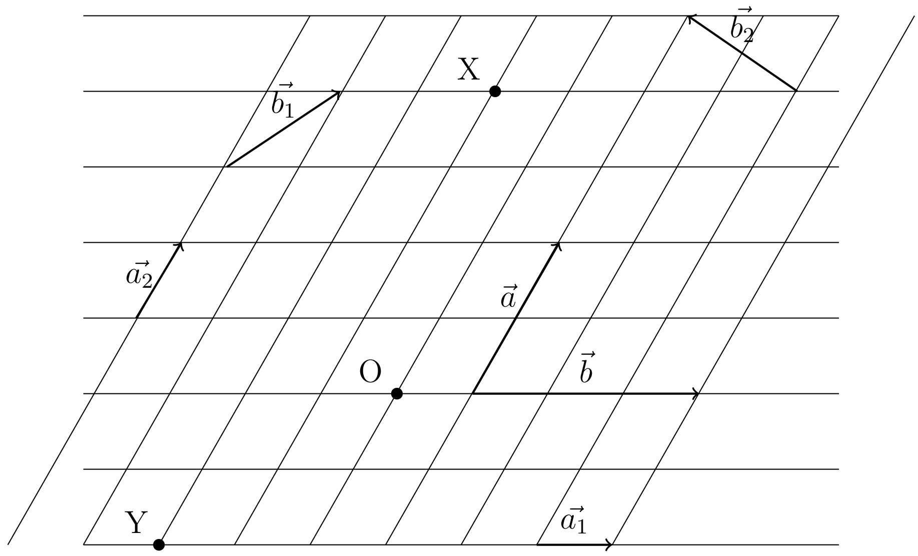
b) Der Vektor $\vec{w}$ bzw. der Punkt Q habe die Koordinaten

$$\vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q^\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Koordinaten bezüglich α von $2\vec{w}$, $\vec{w} + \vec{z}$ und $\vec{w} + Q$.

c) Das Koordinatensystem β sei gegeben durch den Urspung $O_\beta = Y$ und die Basis $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

1. Zeichne das Koordinatensystem β in der Figur ein.
2. Der Vektor $\vec{u}$ habe im neuen System β die Koordinaten $\vec{u}^\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten $\vec{u}^\alpha$ im alten System α und zeichne $\vec{u}$ in der Figur ein.
3. Der Punkt P habe im neuen System β die Koordinaten $P^\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten P^α im alten System α und zeichne P in der Figur ein.



Lösung.

a) $\vec{z}^\alpha = (-1, -6)$ und $X^\alpha = (-1, 4)$ und $Y^\alpha = (-2, -2)$.

b) Aus $\vec{w} = 2\vec{a_1} - \vec{a_2}$ folgt $2\vec{w} = 4\vec{a_1} - 2\vec{a_2}$, somit

$$(2\vec{w})^\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleicherweise

$$(\vec{w} + \vec{z})^\alpha = \vec{w}^\alpha + \vec{z}^\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und

$$(\vec{w} + Q)^\alpha = \vec{w}^\alpha + Q^\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) 1.

$$\vec{u}^\alpha = (3\vec{b_1} + 2\vec{b_2})^\alpha = 3\vec{b_1}^\alpha + 2\vec{b_2}^\alpha = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{YP}$. Auf der Figur sieht man, dass $\overrightarrow{OY} = -2\vec{a_1} - 2\vec{a_2}$ und aus $P^\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{YP} = 2\vec{b_1} + 1\vec{b_2} = 3\vec{a_2}$. So $\overrightarrow{OP} = -2\vec{a_1} + \vec{a_2}$, somit $P^\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Man sagt, dass zwei Ebenen im (3-dimensionalen affinen) Raum parallel sind, entweder, wenn sie gleich sind oder, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben. Seien zwei Ebenen gegeben, die nicht parallel sind. Welche Aussage kann man über die Gestalt der Schnittmenge machen? Leitet diese aus den Axiomen des Raumes her.

Lösung.

Sei ϵ und γ diese zwei Ebene. Sei P ein gemeinsamer Punkt, $P \in \epsilon \cap \gamma$. (Es gibt solchen Punkten, weil die zwei Ebenen nicht parallel sind.) Axiom 9 sagt: Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie mindestene einen weiteren Punkt gemeinsam. Sei Q ein solcher Punkt. Axiom 2 sagt: Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade. Sei $P \vee Q$ die genau Gerade durch P und Q. Axiom 7 sagt: Liegen zwei verschiedene Punkte einer Gerdaen in einer Ebene, so liegt die Gerade in dieser Ebene. Daraus folgt $P \vee Q \subseteq \epsilon$, weil $P, Q \epsilon$. Gleicherweise $P \vee Q \subseteq \gamma$, so $P \vee Q \subseteq \epsilon \cap \gamma$. (Aber gilt es $P \vee Q = \epsilon \cap \gamma$ oder $P \vee Q \subset \epsilon \cap \gamma$?) Sei R in $\epsilon \cap \gamma$. Angenommen, dass R nicht auf $P \vee P$ liegt. So ist P, Q, R ein Dreieck. Axiom 5 sagt: Jedes Dreieck liegt in genau einer Ebene. So, aus $P, Q, R \in \epsilon$ und $P, Q, R \in \gamma$ folgt $\epsilon = \gamma$, das ein Widerspruch ist. So $R \in P \vee Q$, und $\epsilon \cap \gamma \subseteq P \vee$. Aber wir ahben schon bewiesen, dass $P \vee Q \subseteq \epsilon \cap \gamma$, somit $P \vee Q = \epsilon \cap \gamma$.

Aufgabe 4. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren des Vektorraums V.
Sei $U = \{r\vec{a} + s\vec{b} \mid r, s \in K\}$. Seien P und Q zwei Punkte des Raums so, dass $Q \notin U + P$.

- Gilt $P \in U + Q$?
- Wie bestimmt man die Schnittmenge von $U + P$ und $\{r\vec{c} \mid r \in K\} + Q$ wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ unabhängig sind? Bestimmt die Koordinaten der Punkte in der Schnittmenge bezüglich des Koordinatensystems $\alpha = (O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, wenn

  $$\vec{a} = \vec{v}_1,\ \vec{b} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \vec{c} = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3,\ P = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 + O,\ Q = 4\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 + O$$

- Welche Arten von Schnittmengen können auftreten, wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind?

Lösung.

- Angenommen $P \in U + Q$, so es gibt $r, s \in K$ so, dass $P = r\vec{a} + s\vec{b} + Q$. Daraus folgt $\overrightarrow{QP} = r\vec{a} + s\vec{b}$, und dann folgt $\overrightarrow{PQ} = -r\vec{a} - s\vec{b}$, somit $Q = -r\vec{a} - s\vec{b} + P$, d.h. $Q \in U + P$, was ein Widerspruch ist.
- $(U+P) \cap (\{t\vec{c} \mid t \in K\} + Q) = \{R \in \mathbb{P} \mid \exists (r, s, t) \in K^3,\ R = r\vec{a} + s\vec{b} + P = t\vec{c} + Q\}$. Aus $r\vec{v_1} + s(\vec{v_1} + \vec{v_2}) - 2\vec{v_1} + \vec{v_2} - 2\vec{v_3} = t(-\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}) + 4\vec{v_1} + 4\vec{v_2}$ folgt $r + s + t = 6$ und $s + t = 3$ und $t = 2$. Daraus folgt, dass der Punkt R, dessen Koordinaten $(3, 1, 2)$ sind, die Schnittmenge von $U + P$ und $\{t\vec{c} \mid t \in K\} + Q$ ist.
- Wenn es r und s gibt so, dass $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$, ist die Schnittmenge leer. Jetzt angenommen das Gegenteil, so ist $\vec{c}$ ungleich $\vec{0}$. Daraus folgt, dass $\{r\vec{c} \mid r \in K\} + Q$ eine Gerade ist. Außerdem sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängig. Wenn $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, ist $U + P$ gleich $\{P\}$, und die Schnittmenge ist entweder $\{P\}$ (wenn P liegt auf $\{r\vec{c} \mid r \in K\} + Q$), oder die leere Menge falls das Gegenteil. Wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ ungleich $\vec{0}$, ist $U + P$ eine Gerade, so kann die Schnittmenge entweder ein Punkt oder die leere Menge sein.

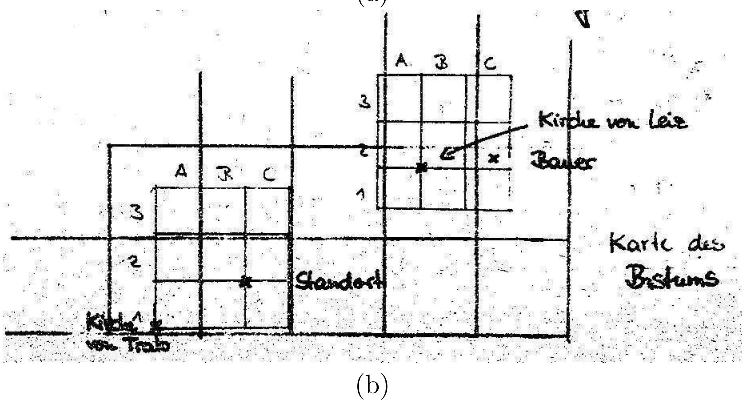
Aufgabe 5. Diese Aufgabe handelt von einer Gegend und Zeit, wo die Kirchen noch im Dorf und die Kühe glücklich sind. Im Dorfe Trats wohnt die Professorin Katja L. für Mathematikdidaktik. Sie hat erfahren, dass im benachbarten Dorf Leiz ein Bauer besonders gute Milch verkauft. In dieser so vorbildlichen Gegend gibt es von jedem Dorf einen Ortsplan im Maßstab 1:1000. Frau Professorin L. hat sich diese Pläne sowohl von Trats wie von Leiz besorgt. Für beide Dörfer hat der Ortsplan das Format 30 mal 30 cm. In Trats liegt die Kirche bedenklicher Weise an der Südwestecke des Dorfes, in Leiz ist die Kirche sowohl nach Süden wie nach Westen auf dem Plan 10 cm von Ortrand entfernt. Die Wohnung von Prof.L. ist im Plan 20 cm in östlicher und 10 cm in nördlicher Richtung von der Kirche eingetragen. Der Bauer ist naturgemäß etwas näher an der Kirche, in Plan liegt sein Hof 15 cm in östlicher und 2 cm in nördlicher Richtung von der Kirche.

Frau Prof.L. möchte nun auf direktem Weg zum Bauern und überlegt sich, in welcher Richtung sie loslaufen soll. Dazu benutzt sie die Bistumskarte im Maßstab 1:10000, in der alle Kirchen verzeichnet sind. In dieser liegt die Kirche von Leiz 6 cm in östlicher und 3,5 cm in nördlicher Richtung. In welcher Richtung muss Frau Prof.L. gehen? Wie weit ist der Weg? Vorausgesetzt, man kann direkt gehen.

Lösung.

Die Maßstäbe der Karten sind uns bekannt und alle (2-3)
Karten sind in Nord-Süd-Richtung.
Wir wählen die Kirche von Trats als Ursprung der Ebene.
Nun können wir unseren Standort nach der Karte von Trats in deren Koordinaten angeben. Ferner können wir die Kirche von Leiz in Koordinaten von Trats angeben, wofür wir die Karte des Bistums und eine Maßstabumrechnung benötigen. Wir kennen nun den Vektor „Kirche von Leiz“ „Bauer“ im System Leiz. Diesen transformieren wir in das System Trats und können nun den Vektor „Kirche von Trats“ „Bauer“ im System Trats angeben. Mittels Vektorsubtraktion erhalten wir die Richtung, in die wir vom Standort aus loslaufen, um zum Bauern zu kommen. (Nur dies nützt uns nicht viel, wenn dort kein Weg entlangführt!?)

(a)



(b)

Aufgabe 6. Fortsetzung von Aufgabe 2 für Tüftler. Wir versuchen umgekehrt, vom alten

System α in das jeweils neue umzurechnen.

d) die Koordinaten O^η des Punktes O und Y^η des Punktes Y in dem Koordinatensystem $\eta = (Y, \vec{b}, \vec{a})$.

e) die Koordinaten O^γ des Punktes O und X^γ des Punktes X in dem Koordinatesystem $\gamma = (O, \vec{a}, \overrightarrow{OY})$.

f) die Koordinaten X^δ des Punktes X in dem Koordinatensystem $\delta = (\vec{a} + O, \overrightarrow{OY}, 3\vec{a} + 2\vec{b})$.

Lösung.

d) $O^\eta = (\frac{2}{3}, 1)$ und $Y^\eta = (0, 0)$.

e) $O^\gamma = (0, 0)$ und $X^\gamma = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

f) $\delta = (\vec{a}+O, \overrightarrow{OY}, 3\vec{a}+2\vec{b})$ ist kein Koordinatensystem der Ebene, weil $\overrightarrow{OY}$ und $3\vec{a}+2\vec{b}$ abhängig sind.