3. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1.

1. Seien P, Q, R und S Punkte der affine Ebene so, dass die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ gleich sind. Beweise, dass auch die Vektoren $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{QS}$ gleich sind. (Hinweis: Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ lässt sich auf zwei Weisen als Summe schreiben.

2. Zeichne eine Figur, die diesen Sachverhalt erklärt.

Lösung. Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ lässt sich als $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$ und $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$ schreiben. Daraus folgt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$. Dann es gilt $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS}$. Wegen $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, folgt $\vec{0} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS}$, anders gesagt $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.

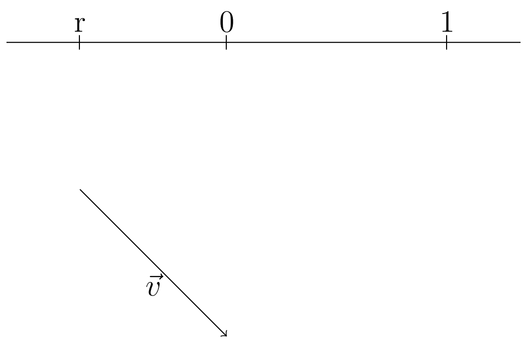
Aufgabe 2. Sei g eine Gerade, die durch Auszeichnung zweier verschiedener Punkte 0 und 1 zur Zahlengerade gemacht wurde - die Punkte r auf g sind also Skalare. Gemäß der Definitionen der Vorlesung:

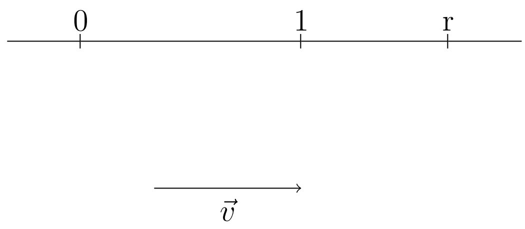
1. In Fig. ist r ein Skalar auf g und $\vec{v}$ ein Vektor, der nicht parallel zu g ist. Bestimme das skalare Vielfache $r\vec{v}$ durch Zeichnung.

2. In Fig. haben g und $\vec{v}$ dieselbe Richtung. Bestimme das skalare Vielfache $r\vec{v}$ durch Zeichnung.

3. In Fig. sind r und s Skalare auf g. Bestimme das Produkt $r \cdot s$ durch Zeichnung.

4. In Fig. ist r Skalar auf g. Bestimme durch Zeichnung einen s auf g mit $rs = 1$.





Lösung. Definition...

Aufgabe 3. Seien g bzw. g' Zahlengeraden bzgl. 0 und 1 bzw. $0'$ und $1'$. Es geht darum zu zeigen, dass es eine bijektive Abbildung $\phi : g \to g'$ mit $\phi(0) = 0'$ und $\phi(1) = 1'$ gibt so, dass $\phi(r+s) = \phi(r) +' \phi(s)$ für alle $r, s \in g$ gilt, wobei $+$ die Addition auf der Zahlengeraden g und $+'$ die Addition auf g' bezeichnet. Kurz, ϕ ist ein Isomorphismus von der Zahlengeraden g auf die Zahlengerade g bzgl. der Addition.

1. Führe den Beweis falls $g \neq g'$ und $\overrightarrow{01} = \overrightarrow{0'1'}$.
2. Führe den Beweis falls $g \neq g'$ und $0 = 0'$.
3. (Zu Hause) Benutze die Aufgabenteile 1 und 2, um die Aussage für alle Paare von Zahlengeraden zu beweisen. Hinweis: Überlege, dass die Hintereinanderausführung von Isomorphismen ein Isomorphismus ist.

Lösung.

1. Betrachtet $\phi : r \mapsto \overrightarrow{00'} + r$.
   - $\phi(0) = \overrightarrow{00'} + 0 = 0'$ und $\phi(1) = \overrightarrow{00'} + 1$. Wegen die Annahme $\overrightarrow{01} = \overrightarrow{0'1'}$ und Aufgabe 1., folgt $\overrightarrow{00'} = \overrightarrow{11'}$ somit $\phi(1) = \overrightarrow{11'} + 1 = 1'$. Statt $\phi(r)$, kann man ab jetzt r' schreiben.
   - Seien r und s zwei Skalare auf g. Wegen der Definition der Addition, gilt es $\overrightarrow{0r} = \overrightarrow{s(r+s)}$. Gleicherweise $\overrightarrow{0'r'} = \overrightarrow{s'(r' +' s')}$. Außerdem $\overrightarrow{0'r'} = \overrightarrow{0r}$, wegen $\overrightarrow{rr'} = \overrightarrow{00'}$ und Aufgabe 1. Daraus folgt $\overrightarrow{s'(r' +' s')} = \overrightarrow{s(r+s)}$. Außerdem $\overrightarrow{s'(r+s)'} = \overrightarrow{s(r+s)}$, wegen $\overrightarrow{ss'} = \overrightarrow{00'} = \overrightarrow{(r+s)(r+s)'}$ und Aufgabe 1. Daraus folgt $\overrightarrow{s'(r' +' s')} = \overrightarrow{s'(r+s)'}$, somit $r' +' s' = (r+s)'$: ϕ ist ein Isomorphismus.
2. Betrachtet ϕ so, dass $\phi(0) = 0$ und für alle r, die auf $g - \{0\}$ liegt, $\phi(r)$ ist der Schnittpunkt von g' und der Parallele zu $1 \vee 1'$ durch r.
   - Wegen die Annahme $0' = 0$ und der Definition von ϕ, folgt $\phi(0) = 0'$. Außerdem ist $1'$ der Schnittpunkt von g' und der Parallele zu $1 \vee 1'$ durch 1, so $\phi(1) = 1'$. Statt $\phi(r)$, kann man ab jetzt r' schreiben.
   - Seien r und s zwei Skalare auf g. Sei P der Schnittpunkt von $(r+s) \vee (r+s)'$ und der Parallele zu g durch r'. Wegen des Zeichnen, folgt $g \parallel r' \vee P$ und $r \vee r' \parallel P \vee (r+s)$, so gibt es ein Parallelogramm, somit $\overrightarrow{(r+s)P} = \overrightarrow{rr'}$. Aber $\overrightarrow{s(r+s)} = \overrightarrow{0r}$ folgt aus der Definition der Addition, somit $\overrightarrow{sP} = \overrightarrow{0r'}$. Jetzt wollen wir zeigen, dass $\overrightarrow{sP} = \overrightarrow{s'(r+s)'}$. Wegen $\overrightarrow{sP} = \overrightarrow{0r'}$ sind $s \vee P$ und g' parallel. Außerdem $s \vee s' \parallel (r+s) \vee (r+s)'$, so gibt es ein Parallelogramm, somit $\overrightarrow{sP} = \overrightarrow{s'(r+s)'}$. Daraus folgt $\overrightarrow{0'r'} = \overrightarrow{s'(r+s)'}$, somit $r' +' s' = (r+s')$.
3. Seien $(g, 0, 1)$ und $(g', 0', 1')$ zwei Zahlengeraden. Wir haben schon bewiesen, dass es ein Isomorphismus zwischen $(g, 0, 1, +)$ und $(g', 0', 1', +')$ gibt, wenn $g \neq g'$ und $\overrightarrow{01} = \overrightarrow{0'1'}$ oder $g \neq g'$ und $0 = 0'$. Jetzt ist es zu zeigen, dass es in anderen Fälle auch ein Isomorphismus gibt.

- Angenommen, dass $g \not\parallel g'$ und $0 \neq 0'$ und $\overrightarrow{01} \neq \overrightarrow{0'1'}$. Sei g'' die Parallele zu g' durch 0. Sei $0'' = 0$ und sei $1''$ so, dass $\overrightarrow{0''1''} = \overrightarrow{0'1'}$. Wegen des ersten Teils und der zweiten Teils dieser Aufgabe, gibt es ein Isomorphismus ϕ_1 zwischen $(g'', 0'', 1'', +'')$ und $(g', 0', 1', +')$ und auch ein Isomorphismus ϕ_2 zwischen $(g, 0, 1, +)$ und $(g'', 0'', 1'', +'')$.
- Angenommen, dass $g \parallel g'$ und $g \neq g'$ und $\overrightarrow{01} \neq \overrightarrow{0'1'}$. Sei g'' eine Gerade durch $0'$, die nicht gleich g' ist; sei $0'' = 0'$; sei $1''$ aug g'', der nicht gleich $0''$ ist. Wegen was wir schon bewieseh haben, gibt es ein Isomorphismus ϕ_1 zwischen $(g'', 0'', 1'', +'')$ und $(g', 0', 1', +')$ und auch ein Isomorphismus ϕ_2 zwischen $(g, 0, 1, +)$ und $(g'', 0'', 1'', +'')$. Die Hintereinanderausführung $\phi_1 \circ \phi_2$ is ein Isomorphismus zwischen $(g, 0, 1, +)$ und $(g', 0', 1'', +')$.
- Angenommen, dass $g = g'$. Sei g'' eine Gerade, die parallel zu g aber nicht gleich g ist. Seien $0''$ und $1''$ zwei verschiedene beliebige Punkte auf g''. Wegen was wir schon bewieseh haben, gibt es ein Isomorphismus ϕ_1 zwischen $(g'', 0'', 1'', +'')$ und $(g', 0', 1', +')$ und auch ein Isomorphismus ϕ_2 zwischen $(g, 0, 1, +)$ und $(g'', 0'', 1'', +'')$.

Aufgabe 4. Die Gerade g sei durch Auszeichnung von 0 und 1 zur Zahlengerade gemacht. In der Vorlesung wurden die folgenden Gesetze bewiesen für alle r, s, $\vec{v}$ und $\vec{w}$: $1\vec{v} = \vec{v}$, $r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$, $(r+s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$, $r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$. Leiet daraus die folgenden Gesetze für das Rechnen mit Skalaren her

1. $(r + s)t = rt + st$.
2. $r(st) = (rs)t$.

Lösung. Die folgende Gesetze wurden in der Vorlesung bewiesen.

1. $1\vec{v} = \vec{v}$
2. $r\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow r = 0 \lor \vec{v} = \vec{0}$
3. $r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$
4. $(r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$
5. $r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$

Seien r, s und t drei Skalare.

1. In Gesetz 4 ersetzt $\vec{v}$ durch $t\overrightarrow{01}$. Es gilt $(r + s)(t\overrightarrow{01}) = r(t\overrightarrow{01}) + s(t\overrightarrow{01})$. Wegen Gesetz 3 folgt daraus $((r + s)t)\overrightarrow{01} = (rt)\overrightarrow{01} + (st)\overrightarrow{01}$. Wegen Gesetz 4 folgt daraus $((r + s)t)\overrightarrow{01} = (rt + st)\overrightarrow{01}$, somit $((r + s)t - (rt + st))\overrightarrow{01} = \vec{0}$. Wegen Gesetz 2 folgt daraus $(r + s)t - (rt + st) = 0$, weil $\overrightarrow{01} \neq \vec{0}$, somit $(r + s)t = (rt + st)$.

2. In Gesetz 3 ersetzt $\vec{v}$ durch $t\overrightarrow{01}$. Es gilt $r(s(t\overrightarrow{01})) = (rs)(t\overrightarrow{01})$. Wegen Gesetz 3 $r(s(t\overrightarrow{01})) = r((st)\overrightarrow{01}) = (r(st))\overrightarrow{01}$ und $(rs)(t\overrightarrow{01}) = ((rs)t)\overrightarrow{01}$. Daraus folgt $(r(st))\overrightarrow{01} = ((rs)t)\overrightarrow{01}$, somit $(r(st))\overrightarrow{01} - ((rs)t)\overrightarrow{01} = \vec{0}$. Wegen Gesetz 4 folgt daraus $(r(st) - (rs)t)\overrightarrow{01} = \vec{0}$. Wegen Gesetz 2 folgt daraus $r(st) - (rs)t = 0$, weil $\overrightarrow{01} \neq \vec{0}$, somit $r(st) = (rs)t$.

Aufgabe 5. Letzte Woche haben wir eine Methode gelernt, um Vektoren zu halbieren. In dieser Übung beweisen wir, dass diese Methode korrekt ist.

1. Zeichne zwei verschiedene Punkte P und Q, einen Punkt R', der nicht auf $P \vee Q$ liegt, und einen Punkt R so, dass $\overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{R'R}$. Wie kann man einen Punkt Q' zeichnen so, dass $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{Q'Q}$?

2. Beweise, dass diese Methode korrekt ist. (Hinweis: Betrachte den Schnittpunkt S von $Q \vee R$ und der Parallelen zu $P \vee R$ durch Q'. Dann kann man z.B. Aufgabe 1. benutzen.)

Lösung. Wegen des Zeichnen, die sechste Punkte sind verschieden, und R' liegt auf $P \vee R$, Q' liegt auf $P \vee Q$, S liegt auf $R \vee Q$. Wegen der Definition von Q', folgt $R' \vee Q' \parallel R \vee S$; wegen der Definition von S, folgt $Q' \vee S \parallel R' \vee R$. Somit gibt es ein Parallelogramm, dann $\overrightarrow{R'R} = \overrightarrow{Q'S}$. Aber $\overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{R'R}$ wegen der Definition von R, somit $\overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{Q'S}$. Wegen Aufgabe 1., folgt $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{R'S}$. Jetzt wollen wir zeigen, dass $\overrightarrow{Q'Q} = \overrightarrow{R'S}$. Wegen $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{R'S}$, folgt $P \vee Q \parallel R' \vee S$. Wegen der Definition von Q', folgt $R' \vee Q' \parallel S \vee Q$. Somit gibt es ein Parallelogramm, dann $\overrightarrow{Q'Q} = \overrightarrow{R'S}$. Daraus folgt $\overrightarrow{Q'Q} = \overrightarrow{PQ'}$.